МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

А.А. Натан, О.Г.Горбачев, С.А. Гуз,
Е.В. Бурнаев, А.В.Гасников, Е.О.Черноусова

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Учебно-методическое пособие

Москва 2015

УДК 519.7

Натан А.А., Горбачев О.Г., Гуз С.А., Е.В. Бурнаев, А.В.Гасников, Е.О.Черноусова Случайные процессы. Учебно-методическое пособие / МФТИ. М., 2015.

Содержит программу, список литературы и задачи одноименного курса, читаемого студентам факультета управления и прикладной математики Московского физико-технического института. Задачи могут быть использованы в качестве упражнений на семинарских занятиях, заданий, экзаменационного материала, а также при самостоятельном освоении курса.

ПРОГРАММА УЧЕБНОГО КУРСА
«Случайные процессы»

Определение понятия «случайный процесс». Система конечномерных распределений случайного процесса, ее свойства. Моментные функции случайного процесса. Корреляционная и взаимная корреляционная функции случайных процессов, их свойства. Преобразования случайных процессов.

Непрерывность случайного процесса в среднем квадратическом, ее необходимое и достаточное условие. Непрерывность случайного процесса по вероятности и с вероятностью единица. Производная случайного процесса в среднем квадратическом, необходимое и достаточное условие ее существования. Интеграл от случайного процесса в среднем квадратическом, необходимое и достаточное условие его существования.

Стационарный случайный процесс. Строгая и слабая стационарность случайного процесса. Взаимная стационарность случайных процессов. Эргодичность случайного процесса по математическому ожиданию в среднем квадратическом. Условия эргодичности по математическому ожиданию.

Спектральное представление стационарного случайного процесса. Теорема Хинчина о спектральном представлении корреляционной функции случайного процесса. Спектральная функция и спектральная плотность случайного процесса, их свойства и приложение. Случайный процесс типа «белый шум».

Пуассоновский случайный процесс. Сложный пуассоновский процесс, процесс с переменной интенсивностью. Процессы восстановления;

Гауссовский (нормальный) случайный процесс, его свойства.

Марковский случайный процесс. Дискретная марковская цепь. Переходные вероятности. Уравнения Колмогорова–Чепмена. Однородные дискретные марковские цепи. Классификация состояний дискретной марковской цепи, теорема о «солидарности» их свойств.

Асимптотическое поведение дискретной марковской цепи. Предельное и стационарное распределения вероятностей состояний дискретной марковской цепи. Теоремы об эргодичности дискретных марковских цепей.

Марковская цепь с непрерывным аргументом. Прямое и обратное уравнения Колмогорова–Феллера. Примеры приложения теории марковских цепей (модели систем массового обслуживания).

Непрерывный марковский процесс. Обобщенное уравнение Маркова. Уравнения Колмогорова и Колмогорова–Фоккера–Планка. Броуновское движение (винеровский процесс).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Натан А.А., Горбачев О.Г., Гуз С.А.* Основы теории случайных процессов: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2003. – 165 с.
2. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.
3. Случайный вектор. Учебно-методическое пособие. Составитель *Натан А.А.* – М.: МФТИ, 2003. – 29 с.
4. *Булинский А.В.* Случайные процессы. Примеры, задачи и упражнения. Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2010. – 216 с.
5. *Кельберт М.Я., Сухов Ю.М.* Вероятность и статистика в примерах и задачах. Том 2. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложений. – М.: МЦНМО, 2009. – 400 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Вентцель А.Д.* Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1996. – 320 с
2. *Гнеденко Б,В*. Курс теории вероятностей. – М*:* Наука, 1988. – 446 с.
3. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. – М.: Мир. 1969. – 400 с.
4. *Розанов Ю.А.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1979. – 1984 с.
5. *Климов Г.П., Кузьмин А.Л.* Вероятность, процессы, статистика. Задачи с решениями. – М.: изд. МГУ, 1985. – 232 с.
6. *Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г.* Задачи по теории вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М.: Наука, 1986. – 328 с.

ЗАДАЧИ
по курсу «Случайные процессы».

1. Пусть случайный процесс $X(t)=x(\omega;\,t)$ задан на вероятностном пространстве $<\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P}>$, где: $\Omega=\{1,2\}$, $\mathscr{F}$ –множество всех подмножеств множества Ω, $\mathscr{P}$ приписывает вероятности, равные 1/2, одноэлементным множествам $\{1\}$ и $\{2\}$. Пусть множество значений параметра t есть отрезок $[0,1]$ и $x(\omega,\,t)=\omega\cdot t$. Найти реализации случайного процесса $X(t)$ и его семейство конечномерных распределений.

2. Пусть случайный процесс $X(t)=x(\omega;\,t)$ определен на вероятностном пространстве $<\Omega,\mathscr{B},\mathscr{P}>$ где Ω = [0, 1], $\mathscr{B}$ – σ-алгебра борелевских подмножеств множества Ω, $\mathscr{P}$ – мера Лебега. Пусть $t\in(0,\,1)$ и $x(\omega,\,t)$ = 1 при $t\le\omega$, $x(\omega,t)=0$ при $t>\omega$. Найти реализации случайного процесса $X(t)$ и его двумерные распределения.

3. Пусть X – случайная величина с функцией распределения $F(x)$, $t\in R$. Найти семейство конечномерных распределений случайного процесса $Y(t)=X+t$.

4. X– случайная величина с равномерным распределением на интервале (0,1). Найти вид реализаций, распределения сечений, системы конечномерных распределений, моментные функции (функцию математического ожидания, корреляционную функцию) случайных процессов:
а) $Y(t)=X\cdot t+a$; б) $Z(t)=X+t$; a – неотрицательная неслучайная величина, $t\in[0,\infty)$.

5. Найти вид реализаций, систему конечномерных распределений, моментные функции (математическое ожидание, корреляционную функцию) пуассоновского случайного процесса.

6. Показать, что для нормального случайного процесса функция математического ожидания $m = m(t)$ и корреляционная функция $R = R(t_1,\, t_2)$ вполне задают систему конечномерных распределений процесса.

7. Пусть X и Y – независимые случайные величины, имеющие одинаковое нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 1/2, $t>0$. Найти семейство конечномерных распределений случайного процесса $Z(t) = (X+Y)/t$.

8. Случайная величина ξ принимает значения -1 и 1 с равными вероятностями. Найти двумерные распределения процесса

$$X(t) = e^{\xi t}, \quad t \in [0,1]$$

и его корреляционную функцию.

9. Пусть X и Y – случайные величины, причем Y имеет симметричное относительно нуля распределение, $P\{Y = 0\} = 0$. Найти вероятность того, что реализации случайного процесса $Z(t) = X + t\,(Y + t), \quad t \geq 0$, возрастают.

10. Найти корреляционную функцию случайного процесса $X(t) = \sum_{t=1}^{n} Y_t\, q_t(t)$, где $q_1(t), q_2(t), ..., q_n(t)$ – неслучайные функции, $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ – некоррелированные случайные величины с дисперсиями $d_1, d_2, ..., d_n$ соответственно.

11. Пусть $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ – независимые случайные процессы с функциями математического ожидания $MX_i(t)=m_i(t)$ и с корреляционными функциями $R_{X_i}(t_1,t_2)$. Найти функцию математического ожидания и корреляционную функцию случайного процесса $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t)$.

12. Пусть $X_1(t)$, $X_2(t)$ – два независимых случайных процесса с корреляционными функциями $R_{X_1}(t_1,t_2)$ и $R_{X_2}(t_1,t_2)$. Найти корреляционную функцию случайного процесса $Y(t) = X_1(t)X_2(t)$.

13. Пусть $X \in \mathcal{N}(m, \sigma)$, b – вещественное число. Найти корреляционную функцию случайного процесса $Y(t) = Xt + b, \ t \geq 0$.

14. Пусть A, X, V – случайные величины такие, что V не зависит от A и X, $A \geq 0, X \geq 0$, V равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$, A и X имеют совместное распределение с функцией плотности распределения $f(a, x)$. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию случайного процесса $Z(t) = A\cos(X\,t + V), \ t \geq 0$. Является ли данный случайный процесс стационарным?

15. Случайный процесс $X(t)$ имеет вид $X(t\} = A + Bt$, где A и B – независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке [0, 1], $t \geq 0$. Вычислить вероятность $P(\mathcal{A})$ случайного события

$$\mathcal{A} = \{0 < X(1) < 0.50\} \cap \{0.50 < X(2) < 0.75\} \cup \{0.50 < X(1) < 1.00\} \cap \{0.25 < X(2) < 0.75\}.$$

16. Пусть для корреляционной функции $R_X(t_1,t_2)$ случайного процесса $X(t)$ выполняется условие: для пары t_1', t_2'

$$\exists \vec{b} = (b_1, b_2)' \ (\vec{b} \neq \vec{0}): \ \vec{b}' \begin{pmatrix} R_X(t_1',t_1') & R_X(t_1',t_2') \\ R_X(t_2',t_1') & R_X(t_2',t_2') \end{pmatrix} \vec{b} = 0.$$

Как это условие отражается на свойствах случайного процесса?

17. Показать, что любая функция двух аргументов вида

$$\psi(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(t_1)\varphi_i(t_2)$$

($a_i \geq 0,\ \varphi_i(t)$ – любые неслучайные действительные функции) обладает свойствами корреляционной функции.

18. X и Y – независимые случайные величины с распределениями вероятностей: $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=P\{Y=1\}=P\{Y=-1\}=0{,}5$. Является ли случайный процесс

$$Z(t) = X\cos\gamma t + Y\sin\gamma t\,.$$

(γ – неслучайная величина) стационарным *а*) в широком смысле; *б*) в узком смысле?

19. Пусть $X(t),\ t \geq 0$, – пуассоновский случайный процесс с параметром λ. Доказать, что случайный процесс $Y(t) = X(t+1) - X(t),\ t \geq 1$ является стационарным в широком смысле.

20. Является ли стационарной последовательность попарно независимых одинаково распределенных случайных величин?

21. Доказать, что сумма независимых стационарных случайных процессов является стационарным случайным процессом.

22. Пусть $X(t)$ – стационарный случайный процесс, Y – случайная величина. Является ли случайный процесс $Z(t) = X(t) + Y$ стационарным?

23. Пусть $X(t)$ – стационарный (в широком смысле) дифференцируемый в среднем квадратическом случайный процесс. Является ли стационарным случайный процесс $Y(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}$? Являются ли процессы $X(t)$ и $Y(t)$ взаимно стационарными?

24. Показать, что для эргодичности по математическому ожиданию стационарного случайного процесса $X(t)$ с корреляционной функцией $R_X(\tau)$ достаточно выполнения условия $R_X(\tau)\xrightarrow[\tau\to\infty]{}0$.

25. Будет ли случайный процесс $\xi(t)=\dfrac{W(t)}{\sqrt{t}}$ эргодичен по дисперсии. Здесь $W(t)$ – винеровский процесс.

26. Будет ли случайный процесс $\eta(t)=\dfrac{K(t)}{t}$ эргодичен по математическому ожиданию. Здесь $K(t)$ – пуассоновский процесс.

27. Случайный процесс $X(t)$ может принимать только два значения: $+1$ и -1. $P\{X(0)=1\}=P\{X(0)=-1\}=\dfrac{1}{2}$. Переключение с одного значения на другое происходит в случайный момент времени ω (ω и $X(0)$ взаимно независимы). ω имеет показательное распределение с параметром λ. Будет ли случайный процесс $X(t)$ эргодичным по математическому ожиданию? Вычислите $R_X(t_1,t_2)$.

28. Случайный процесс $Y(t)$ задан в виде $Y(t)=X(t)\cdot X(t+t_0)$, где t_0 – заданное число, $t\geq 0, X(t)$ – гауссовский центрированный стационарный в широко смысле случайный процесс, имеющий непрерывную корреляционную функцию $R_X(\tau)$ ($\tau=|t_1-t_2|$), причем $\lim\limits_{\tau\to\infty}R_X(\tau)=0$. Исследовать случайный процесс $Y(t)$ на стационарность и эргодичность, найти его корреляционную функцию. (Учесть, что для системы нормально распределенных центрированных случайных величин X_1, X_2, X_3, X_4 справедливо соотношение

$$M(X_1\cdot X_2\cdot X_3\cdot X_4)=R_{12}R_{34}+R_{13}R_{24}+R_{14}R_{23}$$

, где $R_{ij}=M(X_iX_j)$ при $i\neq j$).

29. Случайный процесс $X(t)$ имеет вид $X(t)=b\sin(\gamma t+\varphi)$, где b,γ – известные числа, φ – случайная величина с функцией плотности распределения $f(x)$, $t\geq 0$. Исследовать случайный процесс $X(t)$ на стационарность и на эргодичность по математическому ожиданию в следующих случаях: *а*) $f(x)=\cos x$ при $x\in[0,\pi/2]$, $f(x)=0$ при $x\notin[0,\pi/2]$; *б*) $f(x)=1/2\pi$ при $x\in[0,2\pi]$, $f(x)=0$ при $x\notin[0,2\pi]$.

30. $X(t)$ – случайный процесс с корреляционной функцией, $R_X(t_1,t_2)=a^{-b|t_1-t_2|}$, Y – независимая от $X(t)$ случайная величина с дисперсией

$\sigma_Y^2 > 0$. Являются ли эргодичными по математическому ожиданию процессы $X(t)$ и $Z(t)=X(t)+Y$?

31. Показать, что функция $R(\tau)=\sigma^2 e^{-a|\tau|}\cos\beta\tau$, где a,β,σ – некоторые положительные постоянные, может быть корреляционной функцией непрерывного в среднем квадратическом и стационарного в широком смысле случайного процесса. Определить спектральную плотность, соответствующую такой корреляционной функции.

32. Проверить, что функция $R(\tau)=a^{-b|\tau|}$, $b>0$, является корреляционной функцией некоторого случайного процесса. Найти его спектральную плотность.

33. Найти спектральную плотность случайного процесса $X(t)$, корреляционная функция которого имеет вид

$$R(t) = ce^{-\alpha|t|},\ c, \alpha > 0,\ t \in R.$$

34. Пусть $X(t)=x(\omega;\ t)$ – случайный процесс, определенный на вероятностном пространстве $<\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}>$. Доказать, что если множество Ω счетно и все одноточечные его подмножества имеют положительные вероятности, то стохастическая непрерывность случайного процесса $X(t)$ эквивалентна условию непрерывности всех его траекторий.

35. Пусть $X(t),\ t\geq 0$ – случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и с корреляционной функцией вида $R(t;\ s)=e^{st}$. Доказать, что данный случайный процесс бесконечно дифференцируем в среднем квадратическом.

36. Исследовать на дифференцируемость в среднем квадратическом случайный процесс $X(t)=e^{-at}\sin(\gamma t+\varphi)$, где α, γ – известные числа, φ– случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 2\pi]$, $t \geq 0$.

37. Найдите математическое ожидание и дисперсию стохастического интеграла

$$I(\omega)=\int_0^\infty e^{\alpha t}dW(t,\omega),$$

где $W(t,\omega)$ – винеровский процесс, α – положительная неслучайная константа.

38. Определить $M\left[\eta^2(t)\right]$, где

$$\eta(t) = \int_0^t \tau^2 dK(\tau),$$

где $K(\tau)$ – пуассоновский случайный процесс интенсивности λ.

39. Показать, что поток событий является пуассоновским с интенсивностью λ тогда и только тогда, когда временной интервал между соседними событиями имеет показательное распределение с математическим ожиданием $MX = \lambda^{-1}$.

40.Точечный случайный процесс $X(t)$ представляет собой результат сложения r независимых пуассоновских потоков событий с интенсивностями $\{\lambda_i\}_{i=1}^r$. Определить тип и параметры процесса $X(t)$.

41. Пусть задан пуассоновский поток событий $X(t)$ с интенсивностью λ. Представим этот поток в виде r подпотоков $\{X_i(t)\}_{i=1}^r$, $(X(t) = \sum_{i=1}^r X_i(t))$ путем отнесения каждого события из $X(t)$ к подпотоку $X_i(t)$ с вероятностью p_i (независимо от других событий), $\sum_{i=1}^r p_i = 1$. Определить тип и параметры случайных процессов $\{X_i(t)\}_{i=1}^r$.

42. Пусть $X(t)$ – пуассоновский случайный процесс с интенсивностью λ и $Y(t)$ – случайный процесс, полученный в результате удаления из $X(t)$ всех событий, очередной номер которых не кратен s. Определить тип и параметры распределения интервала между соседними событиями в случайном процессе $Y(t)$.

43. Деятельность коммерческой фирмы состоит в выполнении потока сделок, реализуемых в случайные моменты времени $t = t_1, t_2,\ldots,t_k,\ldots$Каждая k-ая сделка приносит фирме прибыль, представляющую собой случайную величину V_k с математическим ожиданием m и с дисперсией σ^2. Поток сделок описывается пуассоновским процессом с интенсивностью λ. Найти математическое ожидание и дисперсию суммарной прибыли, получаемой фирмой к моменту t. Используя предельную теорему, оценить вероятность получения суммарной прибыли к моменту $t = t^*$ не ниже Q^* (положить: $\lambda = 1$, $t^* = 100$, $m = 4$, $\sigma^2 = 9$, $Q^* = 250$).

44. В задаче 58 случайная величина V_k с вероятностью p принимает значение 1 («успешная сделка») и с вероятностью q = 1 - p – значение 0 («безуспешная сделка»). Найти тип и параметры потока успешных сделок.

45. Пусть $X(t)$ – нормальный (гауссовский) случайный процесс с корреляционной функцией $R_X(t_1,t_2) = be^{-a|t_1-t_2|}, b > 0, a > 0.$ Проверить существование производной $Y(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}$ в среднем квадратическом, найти распределение случайного процесса $Y(t)$ и взаимную корреляционную функцию процессов $X(t)$ и $Y(t)$.

46. Пусть $X(t)$ – нормальный (гауссовский) случайный процесс с математическим ожиданием $m_X(t)$ = m = const и корреляционной функцией $R_X(t_1,t_2) = be^{-a|t_1-t_2|}, b > 0, a > 0.$ Найти вероятность $P\{X(t'') > c\}$, если $X(t') = x'$ (величины c и x' заданы).

47. Пусть $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t),\ldots,X_n(t))'$ – n – мерный нормальный стационарный векторный случайный процесс с известными моментными функциями – вектором математических ожиданий его компонент $M\boldsymbol{X}(t) = (MX_1(t),\ldots,MX_n(t))'$ и матрицей корреляционных функций $\mathbf{R}(t_1,t_2) =(R_{ij}(t_1,t_2))$, где при $i = j$ $R_{ii}(t_1,t_2)$ – корреляционная функция случайного процесса $X_i(t)$ и при $i \neq j$ $R_{ij}(t_1,t_2)$ – взаимная корреляционная функция случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ $(i,j = 1,\ldots,n)$. Найти распределение скалярного случайного процесса X_n в момент времени $t = t''$ при известных значениях[случайных процессов $X_1(t),\ldots,X_{n-1}(t)$ в момент. $t = t'$.

48. Пусть $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), \mathrm{X}_2(t))'$ – двухмерный нормальный стационарный векторный случайный процесс с известными моментными функциями: $M\boldsymbol{X}(t) = (MX_1(t), M\mathrm{X}_2(t))'$, корреляционными функциями $R_{X_1}(t_1,t_2)$. $R_{X_2}(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функцией $R_{X_1X_2}(t_1,t_2)$ его компонент. Найти вероятность $P\{X_2(t'') > c\}$, если $X_1(t') = d$ (величины c и d заданы).

49. Урна содержит в начальный момент m белых и k черных шаров. Опыт состоит в последовательности шагов с извлечением из урны на каждом n – ом шаге одного шара, его возвращением в урну и добавлением в неё одного шара того же цвета. Пусть событие A_n обозначает извлечение белого шара на n - ом шаге, а событие $B_n(r)$ – нахождение в урне на n - ом шаге r белых шаров. Являются ли последовательности $\{A_n\}$ и $\{B_n(r)\}$ марковскими?

50. Однородная дискретная марковская цепь $X(t)$ с множеством состояний S имеет известные переходные вероятности

$$p_{ij}=P\{X(t+1)=j|\ X(t)=i\},\ i,j\in S.$$

Найти распределение вероятностей состояний процесса в момент $t+1$, если *а*) известно состояние процесса в момент t; *б*) известно распределение вероятностей состояний процесса в момент t; *в*) известно состояние процесса в момент $t-1$.

51. Товар определенного типа продается магазином поштучно в порядке очереди (по записи). Число покупателей $U(r)$, записывающихся в очередь в течение r-го интервала времени ($r = 1, 2,\ldots$)– случайная величина; случайные величины $\{U(r)\}$ независимы в совокупности. В начале каждого интервала времени на продажу в магазин поступает один экземпляр товара при условии, что очередь на его покупку не пуста. Является ли длина очереди, фиксируемая в конце каждого интервала времени, марковской цепью?

52. Показать, что для дискретной марковской цепи при $t_1 < t_2 < t_3$ одновременно справедливы равенства

$$а)\, P\{X(t_3)=x_3\,|\,X(t_2)=x_2, X(t_1)=x_1\}=$$
$$=P\{X(t_3)=x_3\,|\,X(t_2)=x_2\};$$
$$б)\, P\{X(t_1)=x_1, X(t_3)=x_3\,|\,X(t_2)=x_2\}=$$
$$=P\{X(t_1)=x_1\,|\,X(t_2)=x_2\}\ \ P\{X(t_3)=x_3\,|\,X(t_2)=x_2\};$$

$$в)\ P\{X(t_1)=x_1\,|\,X(t_2)=x_2, X(t_3)=x_3\}=P\{X(t_1)=x_1\,|\,X(t_2)=x_2\}.$$

53. Пусть последовательность X_0, X_1, …, X_n – дискретная марковская цепь. Является ли марковской последовательность X_n, X_{n-1}, …, X_0?

54. Пусть $X_0, X_1,\ldots$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковую функцию плотности распределения $f(x)$: $f(x) > 0$, $-\infty < x < \infty$. Является ли последовательность $\{Y_n\}$ марковской, если:

$$а) Y_n = X_n,\ n=0,1,2,\ldots,\ б) Y_n=\sum_{i=0}^{n} X_i,\ n=0,1,\ldots,\ в) Y_n = \max\{0, X_0,\ X_1,\ldots, X_n\}?$$

Для марковских цепей найти переходные вероятности за один шаг.

55. Пусть $X_0, X_1,\ldots$и $Y_0, Y_1,\ldots$ – две марковские цепи. Будет ли марковской цепью последовательность $X_0+Y_0, X_1+Y_1,\ldots$?

56. Пусть последовательность случайных величин X_0, X_1,… образует марковскую цепь. Доказать, что любая подпоследовательность последовательности X_0, X_1,…также является марковской цепью.

57. Известно, что дискретная марковская цепь полностью определяется начальным распределением и матрицей вероятностей перехода за один шаг. Определяется ли дискретная марковская цепь начальным распределением и матрицей вероятностей перехода за два шага?

58. Пусть $X_0, X_1, \ldots$ – последовательность случайных величин, образующих марковскую цепь, $\psi(x)$ – некоторая функция. Будет ли последовательность $\psi(X_0)$, $\psi(X_1), \ldots$марковской цепью?

59. Дискретная марковская цепь имеет следующую матрицу вероятностей перехода за один шаг:

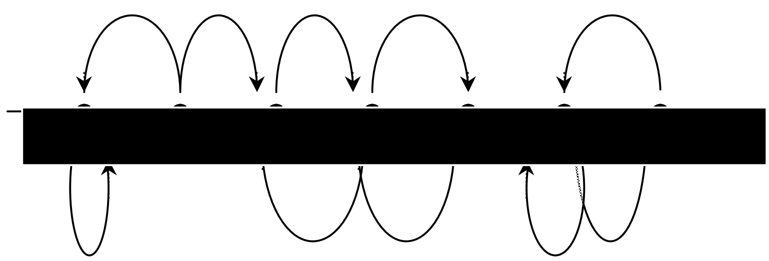
$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу вероятностей перехода за n шагов и предел при $n \to \infty$.

60. Пусть $X_0,\ X_1, \ldots,$ – последовательность случайных величин, образующие однородную дискретную марковскую цепь. Доказать, что для того, чтобы случайные величины $X_0,\ X_1, \ldots,$ были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы все строки матрицы вероятностей перехода за один шаг были одинаковыми.

61. Пусть $X_0, X_1, \ldots,$ – последовательность попарно независимых (необязательно независимых в совокупности) случайных величин. Образуют ли они дискретную марковскую цепь?

62. Классифицировать состояния дискретной марковской цепи, изображенные на графике (стрелками изображены переходы, имеющие ненулевые вероятности).



63. Однородная дискретная марковская цепь с тремя состояниями $S=\{0,1,2\}$ имеет матрицу одношаговых переходных вероятностей

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0 & 0{,}75 \end{pmatrix}.$$

Классифицировать состояния цепи.

64. Классифицировать состояния однородной дискретной марковской цепи с счетным множеством состояний $S=\{1,2,\ \ldots,\ n,\ldots\ \}$, имеющей матрицу одношаговых переходных вероятностей

$$P=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \cdots \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & \ldots & \cdots \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0.5 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{pmatrix}$$

65. Показать, что в неразложимой однородной дискретной марковской цепи с нулевыми состояниями для $\forall i,j \quad p_{ij}(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

66. Доказать, что в конечной неразложимой однородной дискретной марковской цепи все состояния – ненулевые.

67. Доказать, что неразложимая дискретная марковская цепь, у матрицы переходных одношаговых вероятностей которой хотя бы один диагональный элемент положителен, не может быть периодической. Может ли неразложимая дискретная марковская цепь, у матрицы одношаговых переходных вероятностей которой все диагональные элементы суть нули, быть непериодической?

68. Пусть X_0, $X_1,\ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения -1 и +1 с вероятностями p и q = 1-p соответственно. Выяснить, будет ли последовательность случайных величин Y_0, $Y_1,\ldots Y_n,\ldots$марковской цепью, если положить

$$а)Y_n = X_n X_{n+1};\quad б)\ Y_n = \max_{0\le i\le n} X_i;\quad в)\ Y_n = \prod_{i=0}^{n} X_i.$$

69. Проведение некоторого эксперимента состоит в осуществлении большого числа шагов. На каждом шаге может быть выбрано одно из двух возможных действий. Каждое действие может привести как к успеху, так и к неудаче данного шага. Существуют вероятности успеха p_1 и p_2 первого и второго действий соответственно и вероятности их неудач $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$, которые экспериментатору неизвестны. Цель экспериментатора состоит в максимизации математического ожидания числа успехов в эксперименте в целом.

Сравнить две стратегии проведения эксперимента: а) равновероятный выбор на каждом шаге каждого действия; б) повторение на следующем шаге действия, приведшего к успеху на предшествующем шаге, и смена действия, приведшего к неудаче.

70. Рассмотрите дискретную марковскую цепь со счетным числом состояний $\{0,1,2,\ldots\}$ и вероятностями переходов

$$p(m,m+1)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m+2}\right) \quad \forall m\geq 0,$$

$$p(m,m-1)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m+2}\right) \quad \forall m\geq 1,$$

$$p(0,0)=1-p(0,1)=\frac{3}{4}.$$

Найдите стационарное распределение вероятностей.

71. Рассмотрите дискретную марковскую цепь со счетным числом состояний $\{1,2,\ldots\}$ и вероятностями переходов

$$p(m,m+1)=\frac{m}{2m+2} \quad \forall m\geq 1,$$

$$p(m,m-1)=\frac{1}{2} \quad \forall m\geq 2,$$

$$p(m,m)=\frac{1}{2m+2} \quad \forall m\geq 2,$$

$$p(1,1)=1-p(1,2)=\frac{3}{4}.$$

Покажите, что для заданной дискретной марковской цепи нет стационарного распределения вероятностей.

72. Предположим, что на некотором шоссе поток автомобилей можно считать пуассоновским с интенсивностью 30 машин в минуту. Выпишите вероятность того, что пройдет более N секунд, пока мимо поста наблюдения проедут n автомобилей.

73. Рассмотрите марковскую цепь в непрерывном времени с двумя состояниями. Пусть время нахождения цепи в первом состоянии есть экспоненциальная случайная величина с интенсивностью λ, время нахождения цепи во втором состоянии – экспоненциальная случайная величина с интенсивностью μ. Найдите стационарное распределение вероятностей.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\langle\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P}\rangle$ – вероятностное пространство (Ω – множество исходов, $\mathscr{F}$ – σ-алгебра, $\mathscr{P}$ – вероятностная мера);

$MX(t)$ – математическое ожидание случайного процесса $X(t)$;

$DX(t)$ – дисперсия случайного процесса $X(t)$;

$R_X(t_1,t_2)$ – корреляционная функция случайного процесса $X(t)$;

$\mathscr{N}(m,\sigma^2)$ – нормальное распределение с параметрами: m (математическое ожидание) и σ^2 (дисперсия);

$\mathscr{P}o(\lambda)$ – распределение Пуассона с параметром (интенсивностью) λ;

$\Phi^*(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального распределения $\mathscr{N}(0,1)$;

$\overset{0}{X}(t)$ – центрированный случайный процесс;

$'$, ^{T} – знаки транспонирования (вектора, матрицы).