

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА
«Алгебра логики, комбинаторика, теория графов» (ФУПМ)
и «Дискретный анализ» (ФРТК)

Организация экзамена

Экзамен состоит из письменной и устной части. Письменная часть состоит из 10 тестовых вопросов и длится 60 минут. В случае, если студент ответил верно не более, чем на 5 вопросов, за экзамен выставляется неудовлетворительная оценка: 0-2 правильных ответа **неуд(1)**, 3-5 правильных ответов **неуд(2)**.

Содержание устной части экзамена зависит от результатов теста. Если студент ответил верно на 6-7 вопросов теста, то устная часть состоит из беседы с экзаменатором по результатам теста (которая может включать и дополнительные вопросы); максимальная оценка по результатам беседы — **удовлетворительно(4)** (неудовлетворительная оценка также возможна, но не может быть ниже **неуд(2)**).

Если студент ответил верно на 8 вопросов и более, то устная часть состоит из ответа на вопросы билета и доп. вопросы. Билет состоит из задачи на определение и вопроса на доказательство. Решение задачи нужно начать с формулировки определения. Оценка за экзамен не может быть ниже **удовлетворительно(3)**; в случае, если студент верно решил задачу и привёл верное доказательство, оценка не может быть ниже **хорошо(6)**; если, при этом, тест выполнен на полный балл, то оценка не может быть ниже **хорошо(7)**. Для получения отличной оценки после верного ответа на оба вопроса билета студенту нужно ответить на доп. вопрос, состоящий из решения задачи по курсу (в случае получения оценок **отлично(9)** и **отлично(10)** задач может быть несколько). Экзаменатор может поставить отличную оценку без дополнительных задач, если в ходе беседы по билету уже задал достаточно дополнительных вопросов.

Итоговая оценка за курс выставляется согласно БРС. В случае, если по формулам БРС выходит неудовлетворительная оценка, но оценка за экзамен удовлетворительная (или выше), экзаменатор имеет право выставить итоговую оценку **удовлетворительно(3)** (возможно, задав для этого доп. вопросы). Приступив к тесту, студент отказывается от получения оценки автоматом в качестве итоговой оценки за курс.

На экзамене студентам запрещается пользоваться какими-либо материалами и приборами, чем-либо кроме чистой бумаги и письменных принадлежностей. В случае обнаружения факта списывания, за экзамен выставляется оценка **0** (вне зависимости от результатов теста и беседы по устной части).

Пример тестовых вопросов

На экзамене будет тест, вопросы которого будут близки по духу к приведённым ниже. Сами вопросы могут отличаться (не только заменой чисел)!

Ответьте на вопросы. Обоснование не требуется. Не обязательно приводить в ответе число в десятичной записи, если в условии этого не требуется.

1. Найдите симметрическую разность множеств $\{0, 1, 2, 3\}$ и $\{1, 3, 5, 7\}$.
2. Чему равно пятое число Фибоначчи (F_5)?
3. Известно, что вектор значений булевой функции f имеет вид $0?10?1?1$, где $?$ — это 0 или 1. Найдите число всевозможных функций f . Ответом должно быть число в десятичной записи.
4. Сколько существует подмножеств из 5-элементов у 10-элементного множества? Ответом должно быть число в десятичной записи.
5. Сколько не обязательно осмысленных слов можно получить переставляя буквы в слове «ГОЛОСЛОВНЫЙ»?
6. Найдите число инъекций из множества $\{1, 2, \dots, 7\}$ в $\{1, 2, \dots, 10\}$.
7. Найдите число различных правильных раскрасок графа-пути длины 5 в три цвета.
8. Найдите коэффициент при члене $x^2y^3z^4$ в разложении $(3x - 2y + z)^9$.
9. Представьте булеву функцию f , заданную вектором значений 00101001, в виде ДНФ.
10. Найдите вероятность события «при бросании двух костей выпало 9 очков».
11. Сколько подграфов-треугольников у графа K_5 ?

Список определений

1. Логические операции: конъюнкция, дизъюнкция и отрицание
2. Логические операции: импликация, XOR (исключающее иле) и эквивалентность
3. Булевы функции. Задание таблицей истинности и вектором значений
4. Существенные и фиктивные переменные булевой функции
5. Дизъюнктивная нормальная форма
6. Булевы схемы
7. Монотонные, линейные, самодвойственные функции. Функции, сохраняющие 0 (1)
8. Базис, полный базис
9. Множество, подмножество, равенство множеств
10. Операции с множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность. Диаграммы Эйлера-Венна
11. Законы Моргана (с обобщением на произвольное семейство множеств)
12. Закон контрапозиции
13. Правило суммы
14. Метод математической индукции
15. Формула включений и исключений
16. Правило произведения
17. Комбинаторные числа. Число перестановок, число подмножеств размера k у n -элементного множества
18. Характеристическая функция и её использование при подсчёте числа элементов множества.

19. Функции. Область определения и множество значений.
20. Биномиальные коэффициенты, основные свойства. Бином Ньютона.
21. Треугольник Паскаля. Рекуррентное соотношение.
22. Образы и прообразы множеств. Полный прообраз.
23. Отображения (всюду определённые функции). Инъекции, сюръекции и биекции.
24. Бинарные отношения. Транзитивность, симметричность, рефлексивность.
25. Теоретико-множественные операции с отношениями. Операция обращения.
26. Композиция бинарных отношений
27. Отношения эквивалентности.
28. Графы. Основные определения: ребра, вершины, степени вершин.
29. Пути и циклы в графах.
30. Стандартные графы: граф-путь P_n , граф-цикл C_n , полный граф K_n , булев куб B_n
31. Отношение достижимости (связанности) и компоненты связности графа.
32. Правильные раскраски графов. Формулировка критерия 2-раскрашиваемости.
33. Двудольные графы. Двудольные и двураскрашиваемые графы.
34. Подграфы. Изоморфизм графов. Клики и независимые множества.
35. Эйлеровы циклы.
36. Деревья. Полные бинарные деревья.
37. Ориентированные графы, основные определения.
38. Компоненты сильной связности ориентированного графа.

39. Отношения частичного порядка (строгие и нестрогие), линейные порядки.
40. Отношение непосредственного следования.
41. Изоморфные отношения частичного порядка.
42. Вероятностное пространство, вероятностная модель, событие
43. Производящая функция последовательности
44. Числа Фибоначчи и числа Каталана
45. Числа Стирлинга первого и второго рода. Числа Белла

Примеры задач на определения

1. Монотонная булева функция. Известно, что вектор значений булевой функции f имеет вид $0?10?1?1$, где $?$ — это 0 или 1. Найдите число монотонных функций f .
2. Транзитивность. Являются ли отношения $P = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 0)\}$ и $Q = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1)\}$ на множестве $\{0, 1, \dots, 7\}$ транзитивными?
3. Формула включений-исключений. Найдите число биекций $f : \{0, 1, \dots, 9\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 9\}$, таких что $f(0) > 1$, а $f(9) < 8$.
4. Самодвойственная булева функция. Известно, что вектор значений булевой функции f имеет вид $0?1??0?1$, где $?$ — это 0 или 1. Найдите число самодвойственных функций f .
5. Линейная булева функция. Найдите число линейных булевых функций от пяти переменных.
6. Полный прообраз. Функция f из множества $\{1, 2, \dots, 8\}$ в множество $\{a, b, c, d, e\}$ определена следующим образом

$$f : 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto a, \quad 3 \mapsto c, \quad 4 \mapsto d, \quad 5 \mapsto c, \quad 7 \mapsto d.$$

Найдите полный прообраз множества $\{a, b, c\}$

7. Независимое множество. Докажите, что булев куб размерности n содержит независимое множество размера 2^{n-1} .

Список вопросов на доказательство

1. Разложение в ДНФ булевой функции

2. Обобщённый закон Моргана

3. Формула включений и исключений

4. Число k элементных подмножеств n -элементного множества есть $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

5. Бином Ньютона. Формула для биномиальных коэффициентов.

6. Основные свойства треугольника Паскаля: симметричность строк, возрастание чисел в первой половине строки.

7. Основные свойства треугольника Паскаля: формула для суммы чисел в строке, нижняя оценка на центральный коэффициент:

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

8. Число решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ в неотрицательных целых числах. (Задача Муавра.)

9. Формула для n -го числа Каталана: $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

10. Формула подсчёта числа сюръекций из m -элементного множества в n -элементное множество: $\sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$

11. Основная теорема об отношениях эквивалентности (классы эквивалентности на множестве A — в точности разбиения множества A на подмножества)

12. Нижняя оценка числа связных компонент в неориентированном графе.

13. Доказательство критерия 2-раскрашиваемости неориентированного графа.

14. Если G — минимально связный граф (удаление любого ребра приводит к несвязности), то G не содержит простых циклов длины больше двух

15. Если G — связный граф, который не содержит простых циклов длины больше двух, то между любыми двумя вершинами G существует единственный простой путь.
16. Если между любыми двумя вершинами G существует единственный простой путь, то G — связный граф с $|V| - 1$ ребром.
17. Равносильность свойств ориентированных графов: (1) каждая компонента сильной связности состоит из одной вершины; (2) вершины графа возможно занумеровать так, чтобы каждое ребро вело из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером; (3) в графе нет циклов длины больше 1.
18. Критерий существования эйлера цикла в неориентированном графе.
19. Производящая функция для чисел Фибоначчи (аналитическая формула). Явная формула для чисел Фибоначчи (Формула Бине)
20. Число разбиений числа n на различные слагаемые совпадает с числом разбиений числа n на нечётные слагаемые

$$21. \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} - n \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

$$22. \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

$$23. x^n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} [x]_k$$