

# Теория формальных систем и алгоритмов

## Программа экзамена

(ФУПМ МФТИ, осенний семестр 2020 года)

Экзамен по курсу устный, дистанционный. Он состоит из двух частей: (А) беседы, в которой будут задаваться вопросы, не требующие при ответе записи решений, и (Б) решения задач. Каждая из частей даёт в экзаменационную оценку вклад от 0 до 50 баллов. Экзамен начинается с устной беседы (3-4 вопроса) и при неудовлетворительных ответах (<20 баллов) на ней же и заканчивается. Подготовка к ответам на эти вопросы не предусматривается. При удовлетворительном результате части (А) студент получает две задачи, решение которых происходит в постоянном контакте с преподавателем. Полное решение каждой из задач оценивается в 25 баллов.

Из 100-балльной оценки на экзамене и 100-балльной оценка за работу в семестре выводится итоговая оценка за курс по правилам балльно-рейтинговой системы.

## 1 Содержание курса

1. Формулы исчисления высказываний.
2. Семантика исчисления высказываний: определение значения формулы.
3. Тавтологии, выполнимые формулы исчисления высказываний.
4. Схемы аксиом и правила вывода в исчислении высказываний.
5. Выводимые в исчислении высказываний формулы.
6. Вывод из гипотез в исчислении высказываний.
7. Теорема дедукции в исчислении высказываний.
8. Теорема корректности исчисления высказываний.
9. Непротиворечивость исчисления высказываний.
10. Лемма Кальмара.
11. Теорема о полноте исчисления высказываний.
12. Независимость схем аксиом исчисления высказываний.
13. Правило резолюции. Опровержение КНФ с помощью резолюций (резолютивный вывод противоречия). Теоремы о корректности и полноте резолютивных опровержений.

14. Семантика логики первого порядка: предикаты (отношения) и функции. Кванторные операции с предикатами.
15. Определение формулы логики первого порядка.
16. Сигнатура и модель (интерпретация символов из данной сигнатуры).
17. Оценка формулы в заданной модели при заданной оценке переменных.
18. Свободные и связанные вхождения переменных в формулу первого порядка, параметры формулы первого порядка. Замкнутые формулы.
19. Предикаты, выразимые формулами первого порядка в данной модели.
20. Общезначимые формулы, выполнимые формулы, эквивалентные формулы.
21. Предварённая нормальная форма.
22. Сколемизация формулы первого порядка, её основное свойство.
23. Определение возможности элиминации кванторов в модели.
24. Теорема Тарского–Зайденберга.
25. Машины Тьюринга. Определение функции, вычислимой на машине Тьюринга.
26. Универсальная машина Тьюринга.
27. Разрешимые множества.
28. Перечислимые множества.
29. Сводимость по Тьюрингу, основные свойства.
30.  $m$ -сводимость, основные свойства.
31. Формулировка теоремы Поста о перечислимых множествах.
32. Теорема о неразрешимости проблемы останова машины Тьюринга.
33. Проблема достижимости в ассоциативном исчислении, алгоритмическая неразрешимость.
34. Проблема равенства слов в полугруппе, алгоритмическая неразрешимость.
35. Теорема о неразрешимости множества общезначимых формул.
36. Перечислимость множества общезначимых формул.
37. Лемма о бета-функции Гёделя.
38. Теорема о неперечислимости множества формул, истинных в стандартной арифметике.

## 2 Пример экзаменационного билета

### Часть А

- Определение вывода из гипотез. Верно ли, что в исчислении высказываний  $a \rightarrow b \vdash (a \rightarrow c) \rightarrow b$ ?
- Свободные и связанные вхождения переменных в формулы первого порядка. Справедливо ли следующее утверждение «если переменная  $x$  не имеет свободных вхождений в формулу  $A$  первого порядка, то, заменив в формуле  $A$  все вхождения переменной  $x$  на переменную  $y$ , мы получим эквивалентную формулу»?
- Что такое предварённая нормальная форма? Является ли формула  $\forall x(\exists xA(x) \rightarrow \forall xB(x))$  ПНФ? Если нет, укажите ПНФ, эквивалентную данной формуле.
- Определение перечислимого множества. Перечислимо ли множество решений диофантова уравнения  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  (для фиксированного многочлена  $f$ )?

### Часть Б. Задача 1

- Дана такая невыполнимая КНФ с  $n$  переменными, что каждая переменная входит не более чем в два дизъюнкта. Докажите, что из дизъюнктов этой КНФ можно вывести резолюциями пустой дизъюнкт, добавив не более  $O(n)$  дизъюнктов.
- При затруднении в решении задачи возможны вспомогательные вопросы. Например, «что такое КНФ?», «как устроен резолютивный вывод?». За полные ответы на такие вопросы могут выставляться частичные баллы (2–4 балла в зависимости от трудности вопроса).

### Часть Б. Задача 2

- Разрешима ли задача проверки равенства слов для полугрупп, в которых левая часть каждого соотношения имеет длину 1?
- При затруднении в решении задачи возможны вспомогательные вопросы.