Программа и задание по курсу

«Алгебра логики, комбинаторика, теория графов (для ФУПМ). Дискретный анализ (для ФРТК)».

Программа

1. Алгебра логики.

- Булевы функции и способы их задания: таблицы истинности, формулы, вектор значений. Законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, приоритет операций. Законы поглощения. Построение ДНФ . Булев куб. Существенные и фиктивные переменные.
- Определение булевых схем, реализующих булевы функции, через последовательности присваиваний и графов (стандартный базис). Формулы — схемы специального вида . Общее определение схем (для произвольного базиса). Базис — полный базис. Неполный базис: монотонные функции.
- Формулировка теоремы Поста и план её доказательства. Классы Поста и их неполнота:
  T_0 — функции, сохраняющие ноль;
  T_1 — функции, сохраняющие единицу;
  M — монотонные функции;

L — линейные функции;
S — самодвойственные функции.

- Многочлены Жегалкина

2. **Множества и логика.** Связь булевой алгебры и алгебры множеств. Логические законы как способы доказательств (контрапозиция, индукция). Двойственность, самодвойственность. Кванторы. Законы Моргана. Характеристические функции.

3. **Множества и комбинаторика.** Правило суммы. Формула включений-исключений. Функции и множества. Инъекция, сюръекция и биекция:

   - $|A| \leqslant |B|$ если и только если существует инъекция $A \to B$.
   - $|A| \geqslant |B|$ если и только если существует сюръекция $A \to B$.

   * Композиция функций, обратимость функции, образ и прообраз, обратная функция.

4. **Правило произведения. Подсчёт перестановок, размещений и сочетаний.** Декартово произведение множеств. Слово — это конечный набор символов. Правило произведения. Биекция с декартовым произведением множеств. Число двоичных слов длины n. Число подмножеств n-элементного множества. Размещения. Перестановки. Подсчёт количества слов длины k с разными буквами. Количество матчей среди 10 команд (где каждая играет по разу с другой). Подсчёты с кратностью: сколько различных слов можно составить из слова «Математика»? Число сочетаний. Количество k-элементных подмножеств n-элементного множества. * Дискретная вероятность.

5. **Биномиальные коэффициенты.** Количество путей по узлам клеток (вправо и вверх) из (0,0) в (i,j) есть $\binom{i+j}{i}$.

Треугольник Паскаля и его свойства: симметрия, возрастание биномиальных коэффициентов к середине, оценка

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{n+1}.$$

Бином Ньютона и биномиальные коэффициенты. Рекуррентное соотношение. Сумма биномиальных коэффициентов и её комбинаторный смысл. Знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов.

Комбинаторные доказательства. Рекуррентное соотношение на биномиальные коэффициенты в треугольнике Паскаля.

Задача о командире и солдатах: $n \times 2^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

Формула $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Метод точек и перегородок. Число решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

в неотрицательных целых числах есть $\binom{n+k-1}{k-1}$ (Формула Муавра). Число мономов степени d. Число сочетаний с повторениями.

*Доказательство полноты базиса Жегалкина через подсчёты. Числа Фибоначчи. *Числа Каталана (доказательство явной формулы).

6. **Функции и подсчёты.** Образы и прообразы. Число функций (биекций, инъекций, сюръекций).

7. **Бинарные отношения. Отношения эквивалентности.** Формальное определение отношений и их свойств: рефлексивность, транзитивность, симметричность, антисимметричность.

Задание бинарного отношения таблицей, диаграммами (двудольным графом), перечислением пар.

Примеры отношений эквивалентности: рациональные числа, равные и подобные треугольники, неопределённые интегралы. Формальное определение. **Т.:** Классы эквивалентности не пересекаются или совпадают.

Теоретико-множественные операции с отношениями. Операция обращения. Композиция отношений (связь с БД); отношения порядка замкнуты относительно композиции.

8. Графы I. Неориентированные графы.

Определение неориентированных и ориентированных графов. Связь с отношениями. Степень вершины. Сумма степеней вершин — удвоенное количество рёбер. Число людей, сделавших нечётное число рукопожатий, нечётно. Определение пути, цикла, простых путей и циклов. Компоненты связности — класс эквивалентности.

Двудольные графы. 20 школьников писало контрольную, каждый решил по 3 задачи, а каждую задачу решило 5 школьников. Сколько было задач?

Эйлеров цикл. Критерий существования. Каждую задачу решило по 2 школьника и каждый школьник решил две задачи — доказать, что можно организовать разбор контрольной так, что каждый школьник разобрал задачу.

9. Графы II. Деревья.

Связность. Теорема «#компонент связности $\geqslant |V| - |E|$». Расстояние между вершинами, диаметр графа. Почему между двумя вершинами графа есть простой путь, если между ними есть путь.

Деревья. Теорема об эквивалентности четырёх свойств.

Двудольные графы. Двудольный граф = двураскрашиваемый граф. Граф двураскрашиваемый тогда и только тогда, когда нет циклов нечётной длины. Двудольные графы и паросочетания — важность теоремы Холла (без доказательства).

Почему среди 6 людей либо трое попарно знакомы, либо трое попарно незнакомы. Клики и независимые множества — формулировка теоремы Рамсея (если чудом успею, то с доказательством).

10. Ориентированные графы. Определение ориентированного графа. Исходящие и входящие степени — аналог формулы суммы степененй для неориентированного графа. Компоненты сильной связности.

Т.: Следующие условия для ориентированного графа равносильны:

- Каждая компонента сильной связности тривиальна (состоит из одной вершины).
- Граф ациклический.
- Вершины графа можно занумеровать так, что рёбра идут только от вершин с меньшим номером к вершинам с большим номером.

Отношения частичного порядка. Примеры отношений порядка (покоординатный порядок). Линейный порядок. Отношение непосредственного следования и его граф (диаграмма Хассе). Булев куб — двоичные слова, упорядоченные покоординатно. Связь с булевыми функциями. Монотонные функции — функции, согласованные с покоординатным порядком.

11. Вероятность — первые шаги.

- Вероятностное пространство U — конечное множество.
- Вероятностная модель: (U, P), где $P : U \to [0,1]$ — такая функция, что $\sum\limits_{x \in U} P[x] = 1$ (вероятность элементарного исхода).

- Событие — произвольное подмножество U; вероятность события $A \subseteq U$ есть $P[A] = \sum\limits_{x \in A} P[x]$.
- Модель последовательного случайного выбора.
- Вероятность объединения. Верхняя оценка через сумму вероятностей; Формула включений-исключений (возможно без доказательства).

* Вероятностный метод. Числа Рамсея.

12. Производящие функции. Определения и примеры.

Производящая функция бинома Ньютона

- Сила дифференцирования: $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$
- $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$. Отсюда следует

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \ldots + \binom{m}{k}\binom{n}{0}.$$

- Свойства, нужные для математического анализа (экспонента растёт быстрее полинома и т.п.)
- $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

Применение для решения комбинаторных задач Задача Муавра. Задача о счастливых билетах. Найти число целочисленных решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 40, \\ 4 \leqslant x_1 \leqslant 15, \\ 9 \leqslant x_2 \leqslant 18, \\ 5 \leqslant x_3 \leqslant 16. \end{cases}$$

Число разбиений n на различные слагаемые совпадает с числом разбиений n на нечётные слагаемые. Свёртки. Пример использования для вычисления производящей функции последовательности $a_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Задача о числе беспорядков.

Вычисления с помощью производящих функций. Числа Фибоначчи. Числа Каталана. *Общий метод для линейно-рекуррентных последовательностей. Многочлены $P_k(x) = \binom{x}{k}$. Любой многочлен с целыми коэффициентами представим в виде целой линейной комбинации (ц.л.к.) многочленов $P_k(x)$.

Числа Стирлинга первого рода $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

- $[x]_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$.

Числа Стирлинга второго рода $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$. Основные тождества:

- $x^n = \sum\limits_{k=1}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} [x]_k$;
- $\sum\limits_{k \geqslant 1} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} = \sum\limits_{k \geqslant 1} (-1)^{n-k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \delta_{n,m}$, где

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{при } n = m; \\ 0, & \text{при } n \neq m. \end{cases}$$

Числа Белла B_n.

Список литературы

1. Лекции по дискретной математике / М. Вялый, В. Подольский, А. Рубцов, Д. Шварц, А. Шень. — Черновик: http://rubtsov.su/public/hse/2017/DM-HSE-Draft.pdf, 2018.

2. *Журавлёв Ю. И.*, *Флёров Ю. А.*, *Федько О. С.* Дискретный Анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов. — М.: МФТИ, 2012.

3. Сборник задач по дискретному анализу. Комбинаторика. Элементы алгебры логики. Теория графов / Ю. И. Журавлёв, Ю. А. Флёров, О. С. Федько, Т. М. Дадашев. — М.: МФТИ, 2004.

4. *Зуев Ю.* По океану дискретной математике: От перечислительной комбинаторики до современной криптографии. Т.1: Основные структуры. Методы перечисления. Булевы функции. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.

5. *Зуев Ю.* По океану дискретной математике: От перечислительной комбинаторики до современной криптографии. Т.2: Графы. Алгоритмы. Коды, блоксхемы, шифры. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012.

6. *Яблонский С.* Введение в дискретную математику.. — М.: Высшая школа, 2003.

7. *Харари Ф.* Теория графов. Изд. 2-е. — М.: Эдиториал УРРС, 2003.

8. *Андерсон Д. А.* Дискретная математика и комбинаторика. — М.: Вильямс, 2003.

Правила оценивания

Оценка за курс выставляется по следующим формулам:

$$O_{\textbf{авт.}} = \frac{1}{2}O_{\textbf{к.р.}} + \frac{1}{2}O_{\textbf{сем.}}; \qquad O_{\textbf{итог.}} = \frac{1}{2}O_{\textbf{авт.}} + \frac{1}{2}O_{\textbf{экз.}},$$

в которых

- $O_{\textbf{авт.}}$ — оценка, которую студент может получить автоматом,
- $O_{\textbf{к.р.}}$ — оценка за семестровую контрольную работу,
- $O_{\textbf{сем.}}$ — оценка за работу в семестре (выставляется семинаристом),
- $O_{\textbf{итог.}}$ — итоговая оценка за курс,
- $O_{\textbf{экз.}}$ — оценка за экзамен.

Все оценки выставляются по десятибалльной системе, но являются дробными с точностью до сотых. При выставлении оценки в ведомость происходит арифметическое округление. Студент может получить в качестве итоговой оценки за курс оценку $O_{\textbf{авт.}}$, при условии $O_{\textbf{к.р.}} \geqslant 3$. Если же $O_{\textbf{к.р.}} < 3$, студент обязан сдавать экзамен. В случае выполнения неравенства $O_{\textbf{авт.}} - O_{\textbf{к.р.}} \geqslant 2$, для получения оценки $O_{\textbf{авт.}}$ необходима беседа с лектором по материалам курса. По результатам беседы оценка может быть понижена.

Решая идти на экзамен, студент отказывается засчитать оценку $O_{\textbf{авт.}}$ в качестве итоговой оценки за курс и получит оценку $O_{\textbf{итог.}}$.

Экзамен начнётся с небольшого теста, непрохождение которого влечёт неудовлетворительную оценку. После прохождения теста будет беседа на основе билета с вопросами на определения, доказательства и с задачами. В случае, если по формуле $O_{\textbf{итог.}} < 3$, а $O_{\textbf{экз.}} \geqslant 3$, экзаменатор имеет право поставить за курс студенту оценку «удовлетворительно (3)».

Задачи для семинаров и домашнее задание

Задачи для семинарских занятий, приведённые в этом разделе разбиты по неделям (как и домашнее задание). Семинарист в праве отклоняться от предложенного здесь плана семинаров по своему усмотрению.

Задачи, помеченные «◦», рекомендуется разобрать на семинаре. Ссылки на задачи вида Ck§n **p** ведут на задачи из сборника [3].

1. Алгебра логики: введение

1. Для какого слова **ложно** высказывание

«Первая буква слова гласная → (Вторая буква слова гласная ∨ Последняя буква слова гласная)»?

1) Жара 2) Орда 3) Огород 4) Парад

2◦. Докажите, что **а)** $x \to y = \bar{x} \vee y$; **б)** $x \wedge y = \bar{x} \vee \bar{y}$ **в)** $\overline{x \to y} = x \wedge \bar{y}$.

3◦. Булева функция задана вектором значений: $f(x_1, x_2, x_3) = 10100101$.

1. Опишите f через **а)** таблицу истинности;

б) Дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ);

в) Конъюнктивную нормальную форму (КНФ).

2. Какие переменные f являются **а)** существенными; **б)** фиктивными?

4◦. (1.13) Записать в виде КНФ функцию от n переменных, принимающую значение «0» только на наборах из всех нулей и всех единиц.

5. Постройте ДНФ для булевой функции, заданной формулой:

а°) $x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \wedge x_2)$; **б)** $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_4) \wedge \dots \wedge (x_1 \vee x_9)$;

в*) $\bigwedge\limits_{1 \leqslant i < j < k \leqslant 5} (x_i \vee x_j \vee x_k) \wedge (\bar{x}_i \vee \bar{x}_j \vee \bar{x}_k)$.

6. Докажите, что не существует булевой функции $f(x, y)$, существенно зависящей от обеих переменных, такой что

$$\overline{f(x, y)} = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

7. Докажите следующие формулы разложений (Шеннона и Рида):

а) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\bar{x}_1 \wedge f(0, x_2, \dots, x_n)) \vee (x_1 \wedge f(1, x_2, \dots, x_n))$;

б) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = ((1 \oplus x_1) \wedge f(0, x_2, \dots, x_n)) \oplus (x_1 \wedge f(1, x_2, \dots, x_n))$.

8. Булева функция $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равна тому значению, которое принимает большинство переменных (если мнения разделились поровну, $\mathrm{MAJ} = 0$). Докажите, что эту функцию можно представить в виде ДНФ, в которую не входят отрицания переменных.

Домашняя работа

С3: §1: **2**, **6**, **7**, **12**, **14**

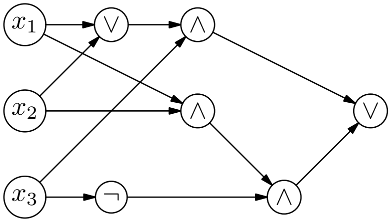
1. Булева функция $\mathrm{PAR}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равна 1, если количество единиц среди значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ нечётно и нулю, если чётно.

а) Выразите функцию $\mathrm{PAR}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ через известные булевы функции (можно использовать связки $\wedge, \vee, \neg, \oplus, \to$).

б) Можно ли представить $\mathrm{PAR}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в виде ДНФ без отрицаний?

2. Схемы и полные базисы: теорема Поста

1. Найдите функцию, которую вычисляет схема в стандартном базисе, представленная графически как



2. Существует ли такая булева функция f от двух переменных, что схема в базисе $\{\wedge, f\}$

$$x_1,\ x_2,\ s_1 := f(x_1, x_2);\ s_2 := f(x_2, x_1);\ s_3 := s_1 \wedge s_2$$

вычисляет **а)** функцию x_1? **б)** функцию $x_1 \oplus x_2$?

3. Являются ли полными следующие базисы? При отрицательном ответе, укажите в каких из классов T_0, T_1, M, L, S лежит замыкание базиса.

а) $\{\neg, \rightarrow\}$, где $\rightarrow$ — импликация;

б) $\{x \downarrow y\}$, где $x \downarrow y$ равна $\bar{x} \wedge \bar{y}$ (стрелка Пирса);

в) $\{\wedge, \vee, \setminus\}$, где $x \setminus y$ равна $x \wedge \bar{y}$;

г) $\{1, \oplus\}$;

д) $\{\neg; \equiv\}$, где $x \equiv y$ равна $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

4. Постройте замыкание базиса $\{\neg, \oplus\}$.

5. Назовём *функцией большинства* $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ булеву функцию, значение которой совпадает с тем значением, которое принимает большинство переменных (если мнения разделились поровну, $\mathrm{MAJ} = 0$). Схемы в базисе $\{\vee, \wedge, 1, 0\}$ называются *монотонными*. Вычисляется ли MAJ монотонной схемой?

6. Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *самодвойственной* (или нечётной), если для всех $x_1, \ldots, x_n$ выполняется равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_n).$$

а) Являются ли самодвойственными функции $x_1 \vee x_2$, $x_1 \wedge x_2$?

б) Докажите, что схема в базисе, состоящем из самодвойственных функций, вычисляет самодвойственную функцию.

7. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — несамодвойственная функция. Докажите, что константы 0, 1 вычисляются в базисе $\{\neg, f\}$.

8. Докажите, что всякую булеву схему в стандартном базисе размера s с n переменными можно переделать в булеву схему, в которой все отрицания применяются только к переменным, и при этом размер новой схемы не превышает $p(s, n)$, где p – некоторый фиксированный полином.

Домашняя работа

1. Вычисляется ли константа 0 в базисе $\{\neg(x_1 \to x_2)\}$?

2. Вычислите $\mathrm{MAJ}(x, y, z)$ схемой в базисе Жегалкина $\{1, \wedge, x_1 \oplus x_2\}$. (Определение MAJ см. на обороте листа.)

3. Сколько ненулевых коэффициентов в многочлене Жегалкина, который равен $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$?

4. Функция f вычисляется в базисе

$$\{\neg\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3), \mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3)\}$$

схемой $x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1 := \mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3);\ s_2 := \neg\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3);$

$$s_3 := \neg\mathrm{MAJ}(s_1, s_2, s_1).$$

Найдите схему в том же базисе, которая вычисляет ту же функцию f, но содержит меньшее количество присваиваний.

5. Докажите полноту базиса, состоящего из одной функции $x \mid y$, которая по определению равна $\neg(x \wedge y)$ (*штрих Шеффера*, она же NAND).

6. Является ли полным базис $\{\vee; \to\}$ из дизъюнкции и импликации?

7. Является ли полным базис $\{\neg, \mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3)\}$?

8. Булева функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется *монотонной*, если для всяких $x, y \in \{0,1\}^n$ верно

$$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y),$$

где векторы x и y сравниваются в покоординатном порядке: $x \leqslant y$ равносильно тому, что $x_i \leqslant y_i$ для всех i.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — немонотонная функция. Докажите, что $\neg x_i$ вычисляется в базисе $\{0, 1, f\}$.

9. Докажите, что всякую монотонную булеву функцию можно вычислить монотонной схемой (определение см. на обороте листа).

10. Булева функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется *линейной*, если она представляется в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus (a_1 \wedge x_1) \oplus \dots \oplus (a_n \wedge x_n)$$

для некоторого набора $(a_1, \dots, a_n) \in \{0,1\}^n$ булевых коэффициентов.

Докажите, если $f(x_1, \dots, x_n)$ — нелинейная функция, то конъюнкция $x_1 \wedge x_2$ вычисляется схемой в базисе $\{0, 1, \neg, f\}$.

3. Множества и логика

1°. Докажите, что для любых множеств A, B, C выполняются равенства

а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

б) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

в) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

г) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Комментарий: *Используйте при решении как диаграммы Эйлера-Венна, так и переход к формулам алгебры логики.*

2°. Докажите включение

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \cup \dots \cup (A_n \triangle B_n)$$

для любых множеств A_i, B_i.

3. Докажите равенство

$$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A_1 \setminus B_1) \cap (A_2 \setminus B_2) \cap \dots \cap (A_n \setminus B_n)$$

для любых множеств A_i, B_i.

4°. Выразите характеристическую функцию $\chi_{A \triangle B}(x)$ через $\chi_A(x), \chi_B(x)$ и **а)** операции $\wedge, \vee, \neg$;

б) арифметические операции $+, -, \times$.

5. Выразите $|A \triangle B|$ через $\chi_A(x), \chi_B(x)$ и арифметические операции.

6°. Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции $\cap$, $\cup$, $\setminus$, неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором множества пусты или состоят из одного элемента.

Домашняя работа

1. Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется равенство $(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \setminus B$?

2. Верно ли, что для любых множеств A, B и C выполняется равенство

$$((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) = A \setminus (B \cup C)?$$

3. Верно ли, что для любых множеств A, B и C выполняется равенство $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$?

4. Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется включение $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) \subseteq B$?

5. Про множества A, B, X, Y известно, что $A \cap X = B \cap X$, $A \cup Y = B \cup Y$. Верно ли, что тогда выполняется равенство $A \cup (Y \setminus X) = B \cup (Y \setminus X)$?

6. Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \ldots$ — невозрастающая последовательность множеств. Известно, что $A_1 \setminus A_4 = A_6 \setminus A_9$. Докажите, что $A_2 \setminus A_7 = A_3 \setminus A_8$.

7. Пусть A, B, C, D — такие отрезки прямой, что $A \triangle B = C \triangle D$ (симметрические разности равны). Верно ли, что выполняется включение $A \cap B \subseteq C$?

4. Множества и комбинаторика

1°. В группе студентов есть один, который знает C++, Java, Python, Haskell. Каждые три из этих языков знают два студента. Каждые два — 6 студентов. Каждый из этих языков знают по 15 студентов. Каково наименьшее количество студентов в такой группе?

2°. Найдите значение булевой функции при всех значениях переменных:

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_2 \wedge x_3) \oplus (x_3 \wedge x_1).$$

Загадка: *причём тут формула включений-исключений?*

3. Докажите, что двоичных последовательностей (слов) длины n, в которых ровно k единиц столько же, сколько и подмножеств размера k множества $\{1, 2, \ldots, k\}$.

4°. Пусть A и B — два множества. Покажите равносильность свойств «существует функция $f\colon A \to B$, являющаяся инъекцией» и «существует функция $f\colon B \to A$, являющаяся сюръекцией».

5°. Чего больше, разбиений 20-элементного множества на 6 непустых подмножеств или его подмножеств размера 5?

Напоминание: *через* 2^A *обозначают множество всех подмножеств множества* A. *Множество, элементами которого являются множества, будем называть* классом (множеств).

6°. Функция f устанавливает соответствие между классом $\mathcal{P} \subseteq \subseteq 2^{\{1,2,\ldots,n\}}$ и многочленом Жегалкина в стандартном виде P:

$$P = \bigoplus_{S \in \mathcal{P}} \bigwedge_{i \in S} x_i,$$

то есть если $\mathcal{P} = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3,4\}\}$, то $f(\mathcal{P}) = 1 \oplus x_1 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3x_4$ (мы полагаем конъюнкцию по пустому множеству равной единице).

1. Докажите, что **а)** f — биекция; **б)** $f(\mathcal{P} \triangle \mathcal{Q}) = f(\mathcal{P}) \oplus f(\mathcal{Q})$.

2. Функция g ставит многочлену Жегалкина P в соответствие булеву функцию f_P, которую тот реализует. Докажите, что **а)** g — инъекция;

б) g — сюръекция (см. задачу 7 недели 1 на разложение Рида).

3. Докажите, что булевых функций от n переменных столько же, сколько и классов подмножеств n-элементного множества (используя функции f и g).

7. *Разбиением* числа N на k частей называется такая невозрастающая последовательность положительных целых чисел $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k$, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = N$. Чего больше, разбиений числа N на не более чем k слагаемых, или разбиений числа $N+k$ на ровно k слагаемых?

8. Пусть для конечных множеств A и B существуют инъекция $f\colon A \to B$ и сюръекция $g\colon A \to B$. Докажите, что тогда существует биекция $h\colon A \to B$.

9. Чего больше, разбиений N на слагаемые, не превосходящие k, или разбиений N на не более чем k слагаемых?

10*. Чего больше: инъективных отображений 5-элементного множества в 20-элементное или сюръективных отображений 20-элементного множества в 5-элементное?

Домашняя работа

1. Сколькими способами можно закрасить клетки таблицы 3×4 так, чтобы незакрашенные клетки содержали или верхний ряд, или нижний ряд, или две средних вертикали?

2. Для полета на Марс набирают группу людей, в которой каждый должен владеть хотя бы одной из профессий повара, медика, пилота или астронома. При этом в техническом задании указано, что каждой профессией из списка должно владеть ровно 6 человек в группе. Кроме того указано, что в группе должен найтись ровно один человек, владеющий всеми этими профессиями; каждой парой профессий должны владеть ровно 4 человека; каждой тройкой — ровно 2.

Выполнимо ли такое техническое задание?

3. Пусть A и B — конечные непустые множества, и $|A| = n$. Известно, что число инъекций из A в B совпадает с числом сюръекций из A в B. Чему равно это число?

4. Постройте биекцию между конечными подмножествами множества положительных целых чисел и конечными строго возрастающими последовательностями положительных целых чисел.

5. Чего больше, разбиений n-элементного множества на не более чем k подмножеств или разбиений $(n+k)$-элементного множества на ровно k подмножеств?

6. Чего больше, правильных скобочных последовательностей из n пар скобок или последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ с элементами ± 1, таких что $\sum\limits_{i=1}^{2n} x_i = 0$?

5. Правило произведения. Подсчёт перестановок, размещений и сочетаний.

1. Есть 3 гвоздики, 4 розы и 5 тюльпанов.

а) Сколькими способами можно составить букет из цветов одного вида?

б) Сколькими способами из них можно составить букет, в котором нечётное количество цветов каждого вида?

в) Сколькими способами можно составить букет, используя любые из имеющихся цветов?

(Цветы одного сорта считаем одинаковыми, количество цветов в букете не ограничено, но не равно 0.)

2. Сколько существует 9-значных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания (то есть каждая следующая меньше предыдущей)?

3. Найдите вероятность того, что в случайном 4-буквенном слове в русском алфавите, есть хотя бы одна гласная? (Всего 33 буквы, 10 из них гласные.)

Комментарий: *Под вероятностью мы понимаем отношение количества всех исходов, удовлетворяющих событию, к количеству всевозможных исходов.*

4. (1.26) Найти число булевых функций от n переменных, имеющих (ровно) k единичных точек.

5. Лестница состоит из 13 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через некоторые ступеньки (можно даже через все). Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?

6°. Сколько имеется различных булевых функций от n переменных, принимающих значение 1 только на тех наборах, в которых содержится ровно k единиц? (но не обязательно на всех таких наборах)

7°. 10 человек случайно выстроились в очередь. Найдите вероятность того, что **а)** Иванов, Петров и Сидоров стоят подряд (в произвольном порядке); **б)** Иванов стоит раньше Петрова; **в)** Иванов и Петров не стоят друг за другом?

8. Сколькими способами можно образовать 6 пар из 12 человек?

9. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

10. При изготовлении пирожные — колечки трех сортов: шоколадные, с корицей и с орехами — упаковываются в стандартные коробки по 18 колечек в каждой. Каждая коробка может содержать колечки всех видов. Порядок колечек в коробке не существенен. Сколько можно составить различных наборов колечек при условии, что в коробке шоколадных колечек не более 9, колечек с корицей не более 3, а ореховых не более 9?

11. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы четные цифры шли в порядке возрастания, а нечетные — в порядке убывания?

Домашняя работа

1. (1.28) Подсчитать число симметрических булевых функций от n переменных.

2. (1.27) Сколько имеется булевых функций от n переменных, сохраняющих одновременно «1» и «0»?

3. Есть 6 кандидатов на 6 вакансий. Сколькими способами можно заполнить вакансии? (Каждая вакансия должна быть заполнена.)

4. а) Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых есть единица или тех, в записи которых её нет?

б) Тот же вопрос для первых 10 миллионов чисел.

5. Найдите вероятность того, что в десятичной записи случайного шестизначного числа, в записи будет хотя бы две одинаковые цифры?

6. Из 36-карточной колоды карт на стол равновероятно и случайно выкладывается последовательность из 4 карт. Какова вероятность того, что две из них красные, а две черные?

7. Сколько существует 6-значных чисел, в которых чётных и нечётных цифр поровну?

8. Сколько существует 7-значных чисел, в которых ровно две четные цифры и перед каждой четной цифрой обязательно стоит нечетная?

9. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в три комнаты: одноместную, двухместную и четырехместную?

10. Сколько способов разместить 20 различных книг на 5 полках, если каждая полка может вместить все 20 книг? Размещения, отличающиеся порядком книг на полках, считаются различными.

11. Студсовет из 8 человек выбирает из своего состава председателя путем тайного голосования. Каждый может отдать один голос за любого члена студсовета. Результат голосования – число голосов, отданных за каждого кандидата. Сколько существует различных результатов голосования?

6. Биномиальные коэффициенты

1. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо.

а) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля?

б) Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

2. Найдите коэффициент при

а) x^3y^7 в разложении $(2x-y)^{10}$;

б) $x_1^3x_2x_4^5x_5$ в разложении $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^{10}$.

3. Докажите, что

а) $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{r}{j}\binom{s}{k-j}=\binom{r+s}{k}$;

б) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{k}=\binom{n+1}{k+1}$.

(Желательно найти комбинаторное доказательство.)

4. Сколько существует способов решения уравнения

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$$

в неотрицательных целых числах?

5. Сколькими способами можно разделить 15 одинаковых монет между 7 нумизматами так, чтобы каждому досталось хотя бы по монете?

6. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах

а) «КОМПЬЮТЕР»; **б)** «ЛИНИЯ»; **в)** «ПАРАБОЛА»;

г) «ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ».

7°. Докажите, что монотонных булевых функций от $2n$ переменных не меньше чем $\dfrac{2^{2n}}{n+1}$.

8. Сколькими способами можно выбрать 6 чисел от 1 до 15, чтобы среди них не было двух, отличающихся на единицу?

9. Докажите, что

$$\binom{n+k+1}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k};$$

10. *Разложением* числа n называется такая последовательность положительных целых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$, что $x_1+x_2+\cdots+x_k = n$. Найдите количество разложений n на нечетные слагаемые.

11. Сколькими способами можно разрезать правильный n-угольник на треугольники, проводя непересекающиеся диагонали?

7. Домашнее задание

1. Робот ходит по координатной плоскости. На каждом шаге он может увеличить одну координату на 1 или обе координаты на 2. Сколько есть способов переместить Робота из точки $(0,0)$ в точку $(4,5)$?

2. Какое слагаемое в разложении $(1+2)^n$ по формуле бинома Ньютона будет наибольшим?

3. Найдите число слов длины n над алфавитом $\{0,1\}$, в которых нет двух единиц подряд.

4. Дать комбинаторное доказательство тождества

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

5. 2.24(1)

6. Какое из чисел больше $\binom{F_{1000}}{F_{998}+1}$ или $\binom{F_{1000}}{F_{999}+1}$?
Здесь F_n — n-е число Фибоначчи.

7. Приведите комбинаторное доказательство равенства

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant (n+1)/2} \binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}.$$

8. Функции и подсчёты

Напоминание: *функции не обязательно всюду определены, однако обозначение $f : A \to B$ означает, что множество A — область определения функции f.*

1. Функция g из множества положительных целых чисел в множество положительных целых чисел сопоставляет числу x наибольший простой делитель x.

а) Какова область определения g?

б) Верно ли, что если X — конечное, то и $g^{-1}(X)$ конечное?

2°. Пусть f — функция из множества A в множество B, $X, Y \subseteq A$, $U, V \subseteq B$. Верны ли для любых множеств f, A, B, X, Y, U, V следующие утверждения

а) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;

б) из равенства $f(X) = f(Y)$ следует $X \cap Y \neq \varnothing$;

в) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$;

г) из равенства $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ следует $U = V$.

3°. Функция f определена на множестве X и принимает значения в множестве Y, при этом $B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение «$f(f^{-1}(B))\ ?\ B$» стало верным?

4. Найдите количество

а) неубывающих инъекций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$;

б) неубывающих сюръекций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$.
Функция неубывающая, если $x \leqslant y$ влечет $f(x) \leqslant f(y)$.

5. Приведите пример сюръекции множества положительных целых чисел на себя, для которой прообраз любого 1-элементного множества бесконечен.

6. Найдите количество функций f из $\{1, \ldots, 7\}$ в $\{1, \ldots, 7\}$, таких что $f(\{1, 2, 3\}) = \{4, 5, 6\}$ и $f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{4, 5, 6\}$ (на $f(7)$ и $f^{-1}(7)$ дополнительных ограничений нет). Ответом на вопрос задачи должно быть число в десятичной записи.

Домашняя работа

1. Функция f из множества целых чисел в множество целых чисел сопоставляет числу x наименьшее простое число, которое больше x^2. Докажите, что если множество целых чисел X конечное, то и полный прообраз этого множества $f^{-1}(X)$ конечен.

2. Пусть f — функция из множества X в множество Y, при этом $A \subseteq X$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение

$$f^{-1}(f(A)) \ ? \ A$$

стало верным? (Возможные знаки сравнения в этой и двух следующих задачах: $\subseteq$, $\supseteq$, $=$. Нужно учесть все варианты.)

3. Пусть f — функция из множества $A \cup B$ в множество Y. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение

$$f(A \setminus B) \ ? \ f(A) \setminus f(B)$$

стало верным?

4. Пусть f — функция из множества X в множество Y, при этом $A \cup B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение

$$f^{-1}(A \setminus B) \ ? \ f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

стало верным?

5. Про функцию f из множества X в множество Y и множество $B \subseteq Y$ известно, что $f^{-1}(B) = X$. Верно ли, что $B = Y$?

6. Приведите пример такой инъекции f из множества X в множество Y, что для некоторого $B \subseteq Y$ выполняются оба условия

$$\begin{cases} B \neq \varnothing, \\ f^{-1}(B) = \varnothing. \end{cases}$$

7. Найдите количество неубывающих функций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to$ $\to \{1, 2, \ldots, m\}$. Функция неубывающая, если неравенство $x \leqslant y$ влечёт неравенство $f(x) \leqslant f(y)$.

9. Бинарные отношения. Отношения эквивалентности

Обозначения: xPy сокращение для $(x, y) \in P$. По аналогии с отношениями типа «больше». P^{-1} — обратное отношение, содержит такие пары (x, y), что $(y, x) \in P$. $\overline{P}$ — дополнительное отношение, содержит пары, не содержащиеся в P. $P \circ Q$ — композиция отношений P и Q.

1°. Найдите результат операций над отношениями, определенными на множестве действительных чисел.

а) $\overline{(>)}$; **б)** $(>)^{-1}$; **в)** $(\geq)\Delta(\leq)$; **г)** $(>) \cap (<)$;

д) $(=) \circ (>)$; **е)** $(<) \circ (<)$; **ж)** $(<) \circ (>)$.

2. Являются ли следующие отношения рефлексивными, симметричными транзитивными:

а) «точки a и b лежат на одной прямой»;

б) «прямая a перпендикулярна прямой b»;

в) «прямая a параллельна прямой b» (ответ зависит от того, по какому учебнику вы изучали геометрию);

г) «для функций $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнено $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$»?

3. Пусть $f : A \to B$ – некоторое отображение. Будут ли следующие отношения отношениями эквивалентности на множестве A:

а) $x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$; **б)** $x \sim_{\bar{f}} y \iff f(x) \neq f(y)$?

В случае положительного ответа на вопрос, опишите классы эквивалентности для соответствующего отношения.

4. Найдите $R \circ R$, где $R(x, y)$ — бинарное отношение на множестве $\mathbb{R}$, означающее, что

а) $y = x + 1$; **б)** $x + y = 1$.

5. Пусть $P \subseteq A \times A$ и $Q \subseteq B \times B$ – отношения эквивалентности. Будет ли отношением эквивалентности отношение $R \subseteq (A \times B) \times (A \times B) : (a, b)R(a', b') \iff aPa', bQb'$?

Домашняя работа

1. Выразите отношение «племянник» через отношения «отец» и «мать» и операции над отношениями.

2. Пусть бинарные отношения $P_1, P_2 \subseteq A \times A$ транзитивны. Будут ли $\overline{P_1}$, $P_1 \cap P_2$, $P_1 \cup P_2$, $P_1 \circ P_2$ обладать теми же свойствами?

3. Бинарное отношение на множестве из 6 элементов содержит 33 пары. Может ли оно быть **а)** симметричным; **б)** транзитивным?

4. Об отображениях (всюду определенных функциях) f, g из множества A в себя известно, что $f \circ g \circ f = \mathrm{id}_A$. Верно ли, что f — биекция? (Множество A не обязательно конечное.)

5. Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A. Докажите, что существуют такие множество B и отображение $f : A \to B$, что каждый класс эквивалентности C представим в виде $C = f^{-1}(b)$ для некоторого элемента $b \in B$.

6. Множество A состоит из семи элементов. Найдите количество отображений $f : A \to A$, таких что $f \circ f = \mathrm{id}_A$.

10. Графы I. Неориентированные графы

О терминологии. Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Выражение «подграф A графа B» означает, что граф A можно получить из графа B удалением части вершин и рёбер.

Граф–путь P_n имеет n вершин $v_1, \ldots v_n$. Рёбрами связаны пары вершин v_i и v_{i+1} $(1 \leqslant n - 1)$. Таким образом, в графе–пути $n - 1$ ребро. Говорят, что *длина* пути равна $n - 1$.

1. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

2. В графе 100 вершин и 800 рёбер.

а) Докажите, что в этом графе есть хотя бы одна вершина степени не меньше 16.

б) Может ли так случиться, что все вершины этого графа имеют степень 16?

3. Вершинами графа, который называется *булев куб размерности* n и обозначается B_n, являются двоичные слова длины n, а соседями (вершинами, соединёнными ребром) являются пары слов, отличающихся в одной позиции.

а) Сколько вершин в булевом кубе B_n?

б) Сколько рёбер в булевом кубе B_n?

в) Сколько в булевом кубе B_n подграфов, которые являются графами–путями длины 2 (вершин в таком графе 3)?

г) Верно ли, что в графе B_3 есть путь длины 3000?

д) Верно ли, что в графе B_3 есть простой путь длины 8? длины 7?

Два графа $G = \langle V, E\rangle$ и $G' = \langle V', E'\rangle$ называют *изоморфными*, если существует биекция $f : V \to V'$, такая что $\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E'$.

4. Граф $S_n = \langle V, E\rangle$ имеет множество вершин $V = 2^{\{1,2,\dots,n\}}$ (вершина $v \in V$ – подмножество множества $\{1, 2, 3, \dots n\}$); вершины v и u соединены ребром тогда и только тогда, когда $|u \triangle v| = 1$.

а) Докажите, что граф S_n изоморфен булеву кубу B_n.

б) Сколько существует различных наборов подмножеств A_1, A_2, $A_3 \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, для которых выполняется $|A_1 \triangle A_2| = |A_2 \triangle A_3| = 1$?

Дополнением $\bar{G}$ графа G называется такой граф на том же множестве вершин, что и у графа G, в котором пара вершин связана ребром тогда и только тогда, когда в G эта пара вершин ребром не связана.

5. Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).

6. Какое максимальное число рёбер может быть в несвязном графе с n вершинами?

7. Про граф известно, что в нём 1000 вершин и 2017 рёбер. Верно ли, что в таком графе может не оказаться ни одного простого пути длины 64?

8. Докажите, что отношение «изоморфизм» на множестве графов является отношением эквивалентности.

Домашняя работа

О терминологии. Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Выражение «подграф A графа B» означает, что граф A можно получить из графа B удалением части вершин и рёбер.

Граф–путь P_n имеет n вершин $v_1, \ldots v_n$. Рёбрами связаны пары вершин v_i и v_{i+1} $(1 \leqslant n-1)$. Таким образом, в графе–пути $n-1$ ребро. Говорят, что *длина* пути равна $n-1$.

Граф–цикл C_n имеет n вершин $v_1, \ldots v_n$. Рёбрами связаны пары вершин v_i и v_{i+1} $(1 \leqslant n-1)$ и пара вершин v_n и v_1. Таким образом, в графе–цикле n рёбер. Говорят, что длина цикла равна n.

1. Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?

2. Найдите все графы, в которых каждая пара рёбер имеет общий конец.

3. В графе на 400 вершинах степень каждой вершины равна 201. Докажите, что в этом графе есть подграф, который является графом–циклом длины 3.

4. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9, используя эти авиалинии (возможно, с пересадками)?

5. В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

6. Граф G имеет множество вершин $V = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Граф G содержит ребро $\{u, v\}$ (для определённости $u < v$), если выполняются следующие условия:

- v делится на u;
- не существует отличной от v вершины $s \in V$, такой что и v делится на s и s делится на u.

а) Постройте граф G.

б) Изоморфен ли этот граф булеву кубу B_3? При положительном ответе укажите биекцию.

7. Докажите, что для любых подмножеств

$$A_1, A_2, \ldots, A_6 \subseteq \{0, 1, \ldots 2017\}$$

справедливо следующие. Для каких-то трёх подмножеств A_i, A_j, A_k выполняется $A_i \triangle A_j = A_i \triangle A_k = A_j \triangle A_k = \varnothing$ или для каких-то трёх подмножеств A_p, A_q, A_r выполняется $A_p \triangle A_q \neq \varnothing, A_p \triangle A_r \neq \varnothing, A_q \triangle A_r \neq \varnothing$.

Пусть G – двудольный граф, с долями L и R, $|L| = |R| = n$, и множеством рёбер E. Степень каждой вершины $v \in L \cup R$ равна 2. Докажите, что существует биекция $f : L \to R$, такая что $f(u) = v$, только если $\{u, v\} \in E$.

11. Графы II. Деревья

О терминологии. Если не оговорено противное, под словом «граф» далее понимается неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Выражение «подграф A графа B» означает, что граф A можно получить из графа B удалением части вершин и рёбер.

Цикл длины k — это последовательность вершин $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1$, в которой любые два соседних члена соединены ребром.

Простой цикл – это такой цикл, в котором вершины $a_1, a_2, \ldots, a_k$ различны. Дерево – связный граф без простых циклов длины больше 2.
Раскраска вершин графа называется *правильной*, если концы каждого ребра покрашены в разные цвета.
Два графа $G = \langle V, E\rangle$ и $G' = \langle V', E'\rangle$ называют *изоморфными*, если существует биекция $f : V \to V'$, такая что $\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E'$.
Вершинами графа, который называется *булев куб размерности* n и обозначается B_n, являются двоичные слова длины n, а соседями являются пары слов, отличающихся в одной позиции.
Расстоянием $\rho(u, v)$ между двумя вершинами u и v в связном графе называют длину кратчайшего пути между ними. *Диаметром* графа G называют число $\max\limits_{u,v\in V} \rho(u, v)$, а также простой путь такой длины.

1. Дерево имеет 2017 вершин. Верно ли, что в нём найдется простой путь длины 3?

2. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?

3. В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество висячих вершин (т.е. вершин степени 1) больше половины общего количества вершин.

Остовным деревом называют подграф графа, который является деревом на всех вершинах исходного графа.

4. Докажите, что любой связный граф имеет остовное дерево

5. а) Найдите диаметр булева куба B_n. Для начала можно взять $n = 3$.

б) Постройте остовное дерево для графа B_3.

Корневое дерево – это дерево с выделенной вершиной – *корнем.* *Листом* называют вершину степени 1, отличную от корня, а *глубиной* дерева – длину самого длинного простого пути от корня до листа.

в) Как связаны диаметр графа и минимальная (по всем остовным деревьям с корнем) глубина остовного дерева графа?

6. а) Докажите, что любое дерево 2-раскрашиваемо (существует правильная раскраска в 2 цвета). **б)** Сколько есть правильных 2-раскрасок у дерева?

7. Докажите, что в дереве на 2n вершинах можно выбрать n вершин так, что ни одна пара выбранных вершин не соединена ребром (такие множества вершин называются *независимыми*).

8. *Кликой* размера n в графе G называют подграф G, изоморфный полному графу K_n.

а) Докажите, что G содержит клику размера n тогда и только тогда, когда его дополнение $\bar{G}$ содержит независимое множество на n вершинах.

б) Докажите, что если G содержит клику размера n, то его вершины нельзя раскрасить правильно в n цветов.

9. Пусть $R \subseteq V \times V$ — антирефлексивное и симметричное отношение. Докажите, что отношение

$$R^* = \{(u, v) \mid \text{ в графе } G = \langle V, R\rangle \text{ есть путь из } u \text{ в } v\}$$

рефлексивное и транзитивное замыкание отношения R, то есть R^* наименьшее рефлексивное и транзитивное отношение, содержащее R.

10. Имеется связный граф. Докажите, что в нём можно выбрать одну из вершин так, чтобы после её удаления вместе со всеми ведущими из неё рёбрами останется связный граф.

Домашняя работа

Вершинами *полного бинарного дерева ранга n* являются двоичные слова длины не больше n (включая *пустое слово* длины 0). Два слова соединены ребром в полном бинарном дереве, если одно получается из другого приписыванием одной цифры справа (нуля или единицы).

1. Степень каждой вершины графа равна 2. Верно ли, что этот граф 2-раскрашиваемый?

2. Сколько существует правильных раскрасок графа–пути длины n (вершин в этом графе n + 1) в красный, синий и зелёный цвета?

3. В дереве на 2017 вершинах ровно три вершины имеют степень 1. Сколько вершин имеют степень 3?

4. Есть два дерева на n вершинах, каждое имеет диаметр длины d. Можно ли так добавить ребро между вершинами этих деревьев, чтобы длина диаметра полученного дерева равнялась d?

5. Назовем не 2-раскрашиваемый граф минимальным, если после удаления любого ребра он становится 2-раскрашиваемым. Докажите, что в минимальном не 2-раскрашиваемом графе на 1000 вершинах есть хотя бы одна изолированная вершина (т.е. вершина степени 0).

6. Найдите количество диаметров в полном бинарном дереве ранга n.

7. Докажите, что булев куб B_{2n} имеет подграф, изоморфный полному бинарному дереву ранга n.

8. Есть ли в булевом кубе остовное дерево, в котором все вершины кроме двух имеют степень 2?

12. Ориентированные графы

Два графа $G = \langle V, E\rangle$ и $G' = \langle V', E'\rangle$ называют *изоморфными*, если существует биекция $f : V \to V'$, такая что $(u, v) \in E \iff$

$(f(u), f(v)) \in E'$.
Вершинами графа, который называется *ориентированный булев куб размерности* n и обозначается OB_n, являются двоичные слова длины n, а ребро (a, b) есть между такими вершинами $a = a_1a_2\dots a_n$ и $b = b_1b_2\dots b_n$, что они различаются ровно в одной позиции – под номером i и $a_i = 0, b_i = 1$.

Отношением частичного порядка (порядком) называют антисимметричное и транзитивное отношение $P \subseteq A \times A$, которое либо рефлексивно, либо антирефлексивно. В первом случае отношение порядка называют *нестрогим* и обозначают $\leqslant$, а во втором – строгим и *обозначают* $<$. Каждому отношению порядка $<$ $(\leqslant)$ ставят в соответствие отношение *непосредственного следования* $\prec$:

$$\prec = \{(x, y) \mid (x < y) \wedge \neg(\exists z : x < z \wedge z < y)\}.$$

Порядок $P \subseteq A \times A$, для которого граф $\langle A, \prec_P \rangle$ изоморфен булеву кубу OB_n называется *покоординатным порядком.* Отношения частичного порядка $\leqslant_P \subseteq A \times A$ и $\leqslant_Q \subseteq B \times B$ называются *изоморфными*, если существует такая биекция $f : A \to B$, что $x \leqslant_P y \iff f(x) \leqslant_Q f(y)$

1. Вершины ориентированного графа — целые числа от 0 до 9. Ребро идет из вершины x в вершину y если $y - x = 3$ или $x - y = 5$. Найдите количество компонент сильной связности в этом графе.

2. Найдите наибольшее целое положительное число, в котором все цифры разные, а любые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, делящееся на 7.

3. а) 50 команд сыграли турнир по волейболу в один круг. Говорят, что команда A сильнее B, если A выиграла у B или есть команда C, такая, что A выиграла у C, а C выиграла у B. Доказать, что команда, набравшая наибольшее число очков, сильнее любой другой.

б) Является ли отношение «сильнее» отношением порядка на множестве команд?

4. Сколько существует различных нестрогих частичных порядков на множестве $V = \{0, 1, 2\}$? Мы считаем порядки P и Q различными, если они не изоморфны друг другу. Постройте графы $\langle V, \prec_P \rangle$ для каждого порядка и докажите.

5. Верно ли, что если P – отношение частичного порядка, то следующие отношения также будут задавать частичные порядки: **а)** P^{-1}; **б)** $\bar{P}$?

6. Найдите максимальное количество простых путей с заданными концами в ориентированном ациклическом графе на n вершинах.

7. Известно, что в ориентированном графе на $\geqslant 2$ вершинах из любой вершины в любую другую идёт ровно один простой путь. Верно ли, что выходные (они же исходящие) степени вершин в этом графе равны 1?

8. Предположим, что последовательность чисел задана соотношением $a_{n+1} = f(a_n)$, где f — некоторая функция (определённая на всех числах).

а) Покажите, что либо все члены последовательности различны, либо она периодична: после некоторого начала (предпериода) числа начинают повторяться (период).

б) Покажите, что второй случай имеет место тогда и только тогда, когда $a_{2n} = a_n$ при некотором n.

Домашняя работа

1. Известно, что в неориентированном графе существует путь, проходящий по каждому ребру ровно два раза. Верно ли, что в графе есть эйлеров цикл?

2. Выходная (она же исходящая) степень каждой вершины в ориентированном графе на n вершинах равна $n-2$. Какое количество компонент сильной связности может быть в этом графе? Укажите все возможные значения.

3. Пусть в ориентированном графе для любой пары вершин u, v есть либо ребро (u, v), либо ребро (v, u) (ровно одно из двух). Докажите, что в таком графе есть простой путь, включающий в себя все вершины.

4. Профессор Рассеянный построил частичный порядок $<_P$ для утреннего одевания:

очки $<_P$ *брюки* $<_P$ *ремень* $<_P$ *пиджак,*
очки $<_P$ *рубашка* $<_P$ *галстук* $<_P$ *пиджак,*
брюки $<_P$ *туфли,*
очки $<_P$ *носки* $<_P$ *туфли,*
очки $<_P$ *часы.*

а) Постройте линейный порядок на вещах так, чтобы исходный порядок их одевания не был нарушен.

б) Сколько всего существует таких линейных порядков?

5. В Вестеросе n городов, каждые два соединены дорогой. Дороги сходятся лишь в городах (нет перекрестков, одна дорога поднята эстакадой над другой). Злой волшебник хочет установить на всех дорогах одностороннее движение так, что если из города можно выехать, то в него нельзя вернуться. Докажите, что

а) волшебник может это сделать;

б) найдется город, из которого можно добраться до всех, и найдется город, из которого нельзя выехать;

в) существует единственный путь, обходящий все города.

г) Сколькими способами волшебник может осуществить свое намерение?

6. Бинарное отношение P называется турниром, если оно антирефлексивно, антисимметрично и связно. (Неформально — это результат кругового турнира — каждую альтернативу сравнили с каждой и запомнили результат). Докажите, что либо турнир — строгий линейный порядок, либо существуют такие альтернативы a, b, c, что aPb, bPc и cPa.

7. Сколько есть порядков на n-элементном множестве, в которых ровно одна пара элементов несравнима?

8. Докажите, что отношение $\subseteq$ на множестве $2^{\{1,\ldots,n\}}$ всех подмножеств n-элементного множества является отношением частичного порядка и изоморфно нестрогому покоординатному порядку.

9. Докажите, что любой частичный порядок P на конечном множестве A можно продолжить до линейного. То есть можно добавить в P некоторые пары элементов из $A \times A$ так, что любые два элемента $a, b \in A$ окажутся сравнимы: будет выполнено либо aPb либо bPa.

13. Вероятность — первые шаги

1. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2) длины 2, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. («Подбрасывания двух игральных костей») Найдите вероятность события «$x_1 + x_2 = 5$».

2. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2, x_3, x_4) длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. («Подбрасывания четырёх игральных костей») Найдите вероятность события «$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ чётно».

3. Вероятностное пространство: последовательности длины 6, состоящие из целых чисел в диапазоне от 0 до 1. Все исходы равновозможны. («Шесть подбрасываний монеты») Найдите вероятность события «выпало три единицы» (то есть ровно три элемента последовательности равны 1).

4. Вероятностное пространство: перестановки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ чисел от 1 до n. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «$a_2 > a_1 > a_3$».

5. Вероятностное пространство: последовательности длины 3, состоящие из целых чисел в диапазоне от 0 до 9 (не обязательно различных). Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «в последовательности встречается 1».

6. Вероятностное пространство: последовательности длины 3, состоящие из различных целых чисел в диапазоне от 0 до 9. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «в последовательности встречается 1».

7. Вероятностное пространство: 3-элементные подмножества множества целых чисел в диапазоне от 0 до 9. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «1 входит в множество».

8. Сравните вероятности событий в предыдущих трёх задачах.

9. Докажите, что случайный граф на n вершинах связен.

Точная формулировка: исходы — все неориентированные графы без кратных ребер с одним и тем же множеством вершин, в котором n элементов. Все исходы равновозможны. Нужно доказать, что вероятность события «граф несвязный» стремится к нулю при $n \to \infty$.

10. Вероятностное пространство состоит из всюду определённых функций $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Все исходы равновозможны. Событие A_n: «$f(i) \neq i$ для всех i». Найдите вероятность события A_n при больших n (более точно, найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}[A_n]$).

Домашняя работа

1. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2) длины 2, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «$x_1 = x_2$».

2. Вероятностное пространство: целые числа от 1 до 100. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «сумма цифр числа равна 9».

3. Вероятностное пространство: перестановки чисел от 1 до 24. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «наибольшее среди первых 12 чисел в перестановке больше наибольшего среди последних 12 чисел».

4. Вероятностное пространство: целые числа от 0 до 48. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «частное от деления числа–исхода на 7 больше остатка (от деления того же числа)».

5. Вероятностное пространство: убывающие последовательности длины 5, состоящие из различных целых чисел в диапазоне от 1 до 36 (каждое следующее число меньше предыдущего). Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «последовательность заканчивается на 1».

6. Вероятностное пространство: неубывающие последовательности длины 5, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 36 (каждое следующее число не меньше предыдущего). Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «последовательность начинается на 1».

7. Вероятностное пространство: матрицы 3×3, элементы которых равны 0 или 1. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «хотя бы одна из крайних линий целиком заполнена нулями» (крайние линии — это первый или третий столбец, первая или третья строка).

8. Вероятностное пространство: двоичные слова длины 21. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «на первых

10 позициях стоит меньше единиц, чем на последних 11».

14. Производящие функции-1

Решая задачи этого листка, используйте аппарат производящих функций, даже если вы можете решить задачу с помощью комбинаторных рассуждений.

1. Докажите, что **а)** $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(m-1)^{n-k} = m^n$;

б) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

2. Найдите коэффициенты производящей функции **а)** $(1+x)^{-n}$;

б) $(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n$ (коэффициенты при мономах вида $x_{i_1}\ldots x_{i_k}$).

3. Докажите, что $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

4. В урне находится 3 красных, 4 синих и 2 зелёных шара. Сколькими способами можно извлечь 6 шаров так, чтобы среди них было нечётное число красных, чётное число синих и хотя бы один зелёный шар?

5. Какова вероятность при бросании четырёх игральных костей выбросить 14 очков?

6. Найдите производящую функцию $f(x)$ для последовательности a_n, состоящей из числа способов набрать n рублей, имея монеты в 1, 2 и 5 рублей. Представьте $f(x)$ аналитически.

7. Вычислите $\sum_{k=1}^{10} k^2 \binom{n}{k} \left(\frac{3}{2}\right)^k$.

8. Имеется p чёрных, q белых и r красных шаров, при этом $p \geqslant q \geqslant r$, $p < q+r$, $p+q+r = 2s$. Докажите, что число способов разделить эти шары поровну между двумя людьми равно $s^2 + s + 1 - \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2)$.

Домашняя работа

1. Найдите производящую функцию для последовательности

а) $a_k = k$; **б)** $a_k = \frac{1}{k!}$.

2. Выразите аналитически

а) $\sum\limits_{k\geqslant 0} \binom{n+k}{n} x^k$; **б)** $\sum\limits_{k\geqslant 0} \binom{k}{n} x^k$; **в)** $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^k$.

3. Докажите, что $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$.

4. Известна производящая функция $g(x)$ для последовательности $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ частичных сумм последовательности $\{a_k\}$. Выразите через неё производящую функцию для последовательности $\{a_k\}$.

15. Производящие функции-2

Комментарий: *под целой линейной комбинацией векторов* $a_1, \ldots, a_n$ *понимают* $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$.

1. Разложением числа n называется такая последовательность положительных целых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$, что $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$. Найдите производящую функцию для последовательности $\{a_n\}$, в которой a_n — число разложений n на нечетные слагаемые.

2. Последовательность $\{a_n\}$ состоит из числа способов разрезать правильный n-угольник на треугольники, проводя непересекающиеся диагонали (говорят, a_n — число триангуляций n-угольника). Найдите производящую функцию для последовательности $\{a_n\}$.

3. Найдите производящую функцию для последовательности

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 0; \\ 1, & \text{при } n = 1; \\ 2F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{при } n \geqslant 2. \end{cases}$$

4. Докажите соотношения:

а) $x^n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \left\{ {n \atop k} \right\} [x]^k$;

б) $\left\{ {n \atop m} \right\} = \dfrac{1}{m!} \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{m-i} \dbinom{m}{k} k^n$;

в) $[x]^n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] x^k$;

г) $B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} B_k$.

5. Найдите (аналитическую) производящую функцию для последовательности $G_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (n-k) F_k$, где F_k — k-ое число Фибоначчи.

6. Докажите, что $\left[{n \atop k} \right]$ — число перестановок с k циклами (так их определил сам Стирлинг).

7. Найдите число отношений эквивалентности на n-элементном множестве.

Домашняя работа

1. Найдите производящую функцию для последовательности

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 0; \\ 1, & \text{при } n = 1; \\ F_{n-1} + 2F_{n-2}, & \text{при } n \geqslant 2. \end{cases}$$

2. Докажите, что если последовательность a_n определяется соотношением

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0,$$

где p, q – некоторые числа, то для её производящей функции $F(t)$ верно, что

$$F(t) = \frac{a_0 + (a_1 + pa_0)t}{1 + pt + qt^2}.$$

3. Найдите производящую функцию для последовательности a_n, состоящей из числа двоичных слов длины n, в которых нет двух единиц подряд.

4. Последовательность $\{b_n\}$ состоит из количеств таких последовательностей целых чисел $a_1, \ldots, a_n$, что $a_1 = 0$ и $0 \leqslant a_{i+1} \leqslant a_i + 1$ для $1 \leqslant i < n$. Найдите производящую функцию для последовательности $\{b_n\}$.