

УТВЕРЖДЕНО

Проректор по учебной и
методической работе

_____ Д.А. Зубцов

2015 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Алгебра логики, комбинаторика, теория графов**

по направлению: 03.03.01 «Прикладная математика и физика»

факультет: **ФУПМ, ФРТК**

кафедра: **математических основ управления**

курс: I

семестры: 1

Трудоёмкость: базовая часть – 3 зач. ед.
вариативная часть – 2 зач. ед.
по выбору студента – 1 зач. ед.

лекции – 34 часа Экзамен – нет

практические (семинарские)

занятия – 34 часа Диф. зачет – 1 семестр

лабораторные занятия – нет

Самостоятельная работа – 10 час

ВСЕГО ЧАСОВ – 68

Программу и задание составили:

член-корр. РАН, д.ф.-м.н. Ю.А. Флеров, ассистент А.В. Зухба,

к.ф.-м.н. О.С. Федько

Программа принята на заседании

кафедры математических основ управления

24 апреля 2015 года

Заведующий кафедрой

С. А. Гуз

I. Элементы алгебры логики

1. Функции алгебры логики. Табличное задание функций. Элементарные функции, их свойства, таблица операций. Коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность элементарных функций.

2. Формулы и функции алгебры логики. Теоремы о разложении функций по одной и нескольким переменным. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма. Совершенная конъюнктивная нормальная форма.

3. Функциональная полнота систем функций алгебры логики. Замкнутые классы. Пять предполных замкнутых классов T_0 , T_1 , L , S , M . Теорема о функции, двойственной к суперпозиции. Критерий функциональной полноты систем функций алгебры логики (теорема Поста). Основная лемма. Лемма о несамодвойственной функции. Лемма о немонотонной функции. Лемма о нелинейной функции. Следствия из критерия полноты.

II. Комбинаторные методы дискретной математики

1. Предмет комбинаторики. Комбинаторные задачи о числе функций, слов в алфавите и размещений объектов по ячейкам при различных ограничениях (m^n , $[m]^n$, $[m]_n$, $[m]^n/n!$, P_n).

2. Числа Стирлинга первого рода, рекуррентное соотношение для них.

3. Биномиальные коэффициенты, производящая функция для них, основные комбинаторные тождества. Полиномиальные коэффициенты, производящая функция для них, основные комбинаторные тождества.

4. Число разбиений n объектов на m классов. Числа Стирлинга второго рода. Рекуррентное соотношение для $S(n, k)$. Разложение степени x^n в базисе $\{[x]_k\}$. Числа Белла разбиений множества на непересекающиеся подмножества, рекуррентное соотношение для чисел Белла.

5. Логические методы комбинаторного анализа. Принцип включений-исключений. Задача о числе беспорядков, задача о числе сюръективных отображений конечных множеств. Системы представителей множеств. Системы различных представи-

телей (с.р.п.). Необходимое и достаточное условие существования с.р.п. Алгоритм построения с.р.п. для заданной системы множеств. Системы одновременных представителей.

III. Элементы теории графов

1. Определение графа. Неориентированные и ориентированные графы. Изоморфные графы. Полные ориентированные и неориентированные графы. Локальные степени вершин. Число вершин нечетной степени в конечном графе. Машинное представление графов. Матрица инцидентности. Матрица смежности (вершин). Список пар, список инцидентности.

2. Пути (маршруты, цепи) в графе, простые пути, циклы. Связность. Теорема о связности двух вершин, имеющих нечетную локальную степень. Максимальное число ребер в графе с n вершинами и k -связными компонентами.

3. Деревья. Связанность любых двух вершин дерева единственным простым путем. Изображение дерева. Концевые (висячие) вершины и концевые (висячие) ребра дерева. Теорема о числе различных деревьев с данными n вершинами.

4. Эйлеровы пути и циклы, теорема о существовании эйлеровых путей и циклов в графе. Алгоритм построения эйлеровых циклов. Гамильтоновы пути и циклы. Пути, имеющие тип цикла. Достаточное условие для того, чтобы полный простой путь имел тип цикла. Связь между наличием в связном графе гамильтоновых циклов и длиной максимальных простых путей в нем.

5. Нахождение кратчайших путей в ориентированном графе от фиксированной вершины до всех остальных вершин (случай неотрицательных весов ребер).

Литература

1. Журавлев Ю.И., Флеров Ю.А., Федько О.С. Дискретный анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов: Учеб. пособие / Ю.И.Журавлев, Ю.А.Флеров, О.С.Федько. – М.: МФТИ, 2012.

2. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Высшая школа, 2003.

3. Харари Ф. Теория графов. Изд. 2-е. – М.: Эдиториал УРРС, 2003.

4. Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика. – М.: Вильямс, 2003.

ЗАДАНИЕ

Номера задач, если это не текстовые T_i , $i=1, \dots, 13$, указаны по сборнику «Сборник задач по дискретному анализу. Комбинаторика. Элементы алгебры логики. Теория графов» / Ю.И. Журавлев, Ю.А. Флеров, О.С. Федько, Т.М. Дадашев. – М.: МФТИ, 2004.

T1, T2, T3, T4*.

T1. Методом математической индукции докажите тождество:

$$\cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \dots \cdot \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^n \sin 2\alpha}.$$

T2. Несколько футбольных команд проводят турнир в один круг. Докажите, что в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

T3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} B \cap X = A; \\ B \cup X = C, \end{cases} \quad \text{где } A \subset B \subset C.$$

T4*. Найдите $\text{НОД}(F_m, F_n)$, где $m, n \in \mathbb{N}$, F_i , $i = 1, 2, \dots$ – числа Фибоначчи, т.е. удовлетворяющие рекуррентным соотношениям: $F_1 = 1$; $F_{m-2} = F_m - F_{m-1}$.

Указание: использовать $F_{(m,n)}$ – наибольший общий делитель индексов m и n .

Глава 1. Комбинаторика

T5, T6, 2.12, 2.17, 2.18*, 2.21, 2.35 (2, 3), T7, T8, 3.9 (1, 2, 3), 3.13 (5, 6*), 3.16, 4.5, 4.6, 4.14*, T9*, 4.23.

T5. Сколько слов длины k можно составить из букв алфавита $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, если выполняются все указанные условия: 1) буква a_1 присутствует в слове и стоит на 5-ом месте; 2) буква a_2 обязательно присутствует в слове; 3) буквы a_3 и a_4 присутствуют в слове и стоят подряд в указанном порядке; 4) буква a_5 встречается ровно 2 раза, а остальные буквы присутствуют не более 1 раза.

T6. 1. Сколько рациональных членов содержит разложение

$$\left(\sqrt[5]{2} + \sqrt{3}\right)^{30} ?$$

2. Найдите коэффициент при $x^m y^n$ в разложении

$$\left(1 + x + y^t\right)^k, \quad \text{где } k, t, m, n \geq 0,$$

$$k, t, m, n \in \mathbb{Z}.$$

T7. Сколькими способами можно разложить m различных шаров по n неразличимым ящикам так, чтобы ни один из ящиков не оказался пустым?

T8. Найдите $\sum_{k=1}^n \left(C_n^k + k^2 - ak + b\right) C_n^k$, где $a, b \in \mathbb{R}$.

T9*. Найдите НОК (F_m, F_n, F_k) , где $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Глава 2. Элементы алгебры логики

T10, T11, 1.8, 1.12, 2.4, T12, 2.11, T13, 2.24, 2.33, 2.35.

T10. Какие утверждения теории множеств можно получить из тождеств алгебры логики:

a) $(x \cdot \bar{y}) \rightarrow x = 1,$

b) $(x \cdot y) \vee (\bar{x} \cdot y) = y?$

T11. На основании каких тождеств алгебры логики можно получить следующие утверждения теории множеств:

$\left\{ \begin{array}{l} a) (X \cap Y) \subseteq (X \cup Y), \\ b) X \cap (\bar{X} \cup Y) \subseteq Y? \end{array} \right.$

T12. Сколько существует симметрических линейных функций от n переменных, т.е. функций, значения которых не зависят от перестановки их значений переменных?

T13. Выяснить монотонность следующих функций:

a) $x_1 x_2 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_2 x_4 x_5 \vee x_2 \bar{x}_3,$

b) $x_1 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_2 x_3 x_5.$

Глава 3. Теория графов

1.2, 2.5, 2.18, 3.6, 4.10 (1), 4.12, 4.19.

Срок сдачи задания – первая неделя декабря.

Подписано в печать .07.2015. Формат 60 × 84 $\frac{1}{16}$.

Усл. печ. л. 1,0. Тираж 600 экз. Заказ №
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

E-mail: rio@mail.mipt.ru