ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ К ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ ДИСКРЕТНОГО АНАЛИЗА

1. Примеры простых

1.1. Построить таблицу истинности функции $(x \sim y) \to (y \mid z)$.

Решение. Найдём наборы переменных, на которых функция принимает нулевые значения.

$$(x \sim y) \to (y \mid z) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x \sim y = 1 \\ y \mid z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Значит функция принимает нулевое значение только на единичном наборе, а на остальных наборах она принимает единичное значение.

Ответ: (11111110). □

1.2. Сколько можно составить слов длины n без повторений в алфавите из k символов:

а) заканчивающихся на заданный символ a,

б) заканчивающихся или начинающихся на заданный символ a,

в) содержащих заданный символ a?

Решение. а) Одно место и один символ заняты, поэтому задача аналогична составленю слова длины $n-1$ в алфавите из $k-1$ символа: $[k-1]_{n-1}$.

б) Есть два способа выбрать положение для символа a, остальные $n-1$ место нужно заполнить из алфавита, образуемого оставшимися $k-1$ символами: $2[k-1]_{n-1}$.

в) Есть n способов выбрать положение для символа a, остальные $n-1$ место нужно заполнить из алфавита, образуемого оставшимися $k-1$ символами: $n[k-1]_{n-1}$.

□

1.3. Доказать, что простой граф остаётся связным после удаления некоторого ребра тогда и только тогда, когда это ребро принадлежит какому-нибудь циклу.

Решение. Пусть из графа удалили ребро, и он остался связным. Рассмотрим две вершины — концы удалённого ребра. Существует путь их соединяющий. В исходном графе этот путь и удалённое ребро образуют цикл.

Пусть из связного графа удалили ребро, принадлежащее циклу. Поскольку граф был связен, то для любой пары вершин существовал путь, их соединяющий. Если такой путь не содержал удалённое ребро, то он существует и в полученном графе. Если содержал, то заменим в пути это ребро на оставшуюся часть цикла. Получим новый путь, связывающий две вершины. Таким образом, любы две вершины останутся соединёнными путём, значит граф связен. □

2. Примеры средних

2.1. Построить полином Жегалкина для функции, заданной с помощью ДНФ: $(x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}) \vee (\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}) \vee (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z)$.

Решение.

$$(x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}) \vee (\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}) \vee (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z) = \overline{\overline{(x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}) \vee (\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}) \vee (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z)}} = \overline{x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}} \cdot \overline{\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}} \cdot \overline{\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z} \oplus 1 =$$
$$= (x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \oplus 1) \cdot (\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \oplus 1) \cdot (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \oplus 1) \oplus 1 = (x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \oplus \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \oplus 1) \cdot (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \oplus 1) \oplus 1 =$$
$$= x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \oplus \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \oplus \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \oplus 1 \oplus 1 = x(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)(y \oplus 1)z =$$
$$= xyz \oplus xy \oplus xz \oplus x \oplus xyz \oplus xy \oplus yz \oplus y \oplus xyz \oplus xz \oplus yz \oplus z = xyz \oplus x \oplus y \oplus z.$$

□

2.2. Сколькими способами можно представить натуральное число n как упорядоченный набор нечётных слагаемых?

Решение. Пусть при каждом n ответ к задаче задаётся как Φ_n. Рассмотрим небольшие n.

n	Разложения	Φ_n
1	1	1
2	$1+1$	1
3	$1+1+1$, 3	2
4	$1+1+1+1$, $1+3$, $3+1$	3

Заметим, что при $n \leqslant 4$ $\Phi_n = F_n$, где F_n — n-е число Фибоначчи. Докажем это по индукции для любого натурального n.

Приведённая таблица служит доказательством базы индукции.

Предположим, что $\forall n \leqslant k$ $\Phi_n = F_n$. Докажем, что $\Phi_{k+1} = F_{k+1}$, т. е. утверждение верно при $n = k+1$. При разложении числа n возможны два не пересекающихся случая:

— Разложение начинается на 1. В этом случае остальная часть разложения представляет собой разложение числа $n-1$, которое можно получить Φ_{n-1} способами.

— Разложение начинается с нечётного числа, большего 1. Тогда вычтя из первого слагаемого 2, мы получим разложение числа $n-2$, удовлетворяющее условию задачи. В другую сторону, добавив 2 к первому слагаемому произвольного разложения числа $n-2$, мы получим разложение числа n, соответствующее этому случаю. Поэтому таких разложения Φ_{n-2}.

По правилу суммы, $\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2} = F_{n-1} + F_{n-2} = F_n$.

Утверждение доказано при $n = k+1$, поэтому, по принципу математической индукции, оно верно при любом натуральном n. □

2.3. Доказать, что среди шестерых человек всегда найдутся трое, которые либо все знают друг друга, либо каждый из них не знает других.

Решение. Рассмотрим граф G, в котором вершины обозначают людей, а ребро — то, что два соответствующих человека знают друг друга. Задача сводится к поиску треугольника в G или $\overline{G}$.

Выберем произвольную вершину x. По принципу Дирихле, среди оставшихся пяти должны найтись три вершины y_1, y_2, y_3 либо все связанные с x, либо все не связанные с x. Рассмотрим первый случай, второй разбирается аналогично для графа $\overline{G}$. Если есть ребро (y_i, y_j), то xy_iy_j — треугольник в G. Если нет таких ребер, то $y_1y_2y_3$ — треугольник в $\overline{G}$. $\square$

3. Примеры сложных

3.1. Пусть

$$f(x,y,z) = (x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}) \vee (\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}) \vee (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z) \vee (x \cdot y \cdot z), \quad g(x,y,z) = xy \vee yz \vee xz.$$

Определить принадлежность каждой из функций f, $\overline{f}$, g к предполным классам и выяснить, образует ли замыкание множества этих трёх функций полную систему функций алгебры логики.

Решение. Построим таблицы истинности функций:

x	y	z	f	$\overline{f}$	g
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1

Из таблицы очевидно, что $f, g \in T_0$, $\overline{f} \notin T_0$, $f, g \in T_1$, $\overline{f} \notin T_1$, $f, \overline{f}, g \in S$.

$f(0,0,1) = 1 > 0 = f(0,1,1)$, $\overline{f}(0,0,0) = 1 > 0 = \overline{f}(0,0,1)$, поэтому $f, \overline{f} \notin M$. С другой стороны, $g \in M$, в чём можно убедиться проверкой.

Также из таблицы можно заметить, что $f = y \oplus z$, откуда следует, что $\overline{f} = y \oplus z \oplus 1$. Поэтому $f, \overline{f} \in L$. Предположим, что $g \in L$. Тогда $g = \alpha x \oplus \beta y \oplus \gamma z \oplus \delta$.

1) $\delta = g(0,0,0) = 0$;

2) $\alpha = g(1,0,0) \oplus \delta = 0 \oplus 0 = 0$;

3) $\beta = g(0,1,0) \oplus \delta = 0 \oplus 0 = 0$;

4) $\gamma = g(0,0,1) \oplus \delta = 0 \oplus 0 = 0$.

Получается, что $g \equiv 0$, что противоречит тому, что $g(1,1,1) = 1$. Поэтому $g \notin L$.

Ответ:

	T_0	T_1	S	M	L
f	+	+	+	−	+
$\overline{f}$	−	−	+	−	+
g	+	+	+	+	−

, замыкание не полно, поскольку нельзя получить не самодвойственную функцию. $\square$

3.2. Выразить через числа Стирлинга количество последовательностей $a_1, \ldots, a_n$ натуральных чисел, не превосходящих k, таких, что первое появление числа i встречается раньше, чем первое появление числа $i+1$, при этом каждое из чисел $1, \ldots, k$ встречается хотя бы один раз.

Решение. Покажем, что ответ равен $S(n,k)$. Для этого построим биекцию таких последовательностей и разбиения n пронумерованных позиций на k классов.

Пусть дана последовательность, удовлетворяющая условию задачи. Тогда объединим в один класс позиции, на которых стоят одинаковые элементы последовательности. Будет получено k классов для n позиций.

Обратно, если есть разбиение позиций на n классов, то упорядочим полученные классы по возрастанию минимального элемента. И на каждое место, содержащиеся в i-м классе ($i = 1, \dots, k$) поставим число i. Получим последовательность, удовлетворяющую условию задачи. $\square$

3.3. Доказать, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его циклы имеют четную длину.

Решение. Пусть граф двудольный. Обойдём произвольный цикл. Переход по каждому ребру меняет долю. Начало и конец обхода должны быть в одной доле, поэтому переходов должно быть чётное число. Это означает, что цикл чётной длины.

Пусть в графе все циклы чётной длины. Докажем, что каждая его компонента связность двудольная. Это будет означать, что весь граф двудольный. Выберем произвольную вершину x. Поместим все вершины, расстояние от которых до x нечётно в группу A, остальные вершины, включая x, — в группу B. Пусть вершины y_p и z_q лежат в одной группе и соединены ребром. Существуют пути $y_0 \dots y_p$ и $z_0 \dots z_q$, где p и q одной чётности, $y_0 = z_0 = x$. Пусть k — минимальное натуральное число такое, что $y_k \neq z_k$. Рассмотрим цикл $y_{k-1} y_k \dots y_p z_q \dots z_k z_{k-1}$. Его длина равна $p - (k-1) + 1 + q - (k-1) = p + q - 2k + 3$, т. е. нечётна. Полученное противоречие означает, что две вершины из одной группы не могут быть соединены ребром. Поэтому A и B образуют две доли. $\square$