

Программа курса к экзамену по случайным процессам

1. Определение понятия «случайный процесс». Система конечномерных распределений случайного процесса, ее свойства. Выборочное пространство случайного процесса. Теорема о существовании непрерывной модификации случайного процесса. Моментные функции случайного процесса. Корреляционная и взаимная корреляционная функции случайных процессов, их свойства.
2. Пуассоновский процесс, его свойства. Теорема о явной конструкции пуассоновского процесса и ее следствия. Процессы восстановления. Сложный пуассоновский процесс, неоднородный пуассоновский процесс.
3. Свойства нормальных (гауссовских) векторов. Нормальный (гауссовский) случайный процесс. Винеровский процесс, его свойства. Теорема Вика. Винеровский процесс как предел случайных блужданий.
4. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость по Риману случайного процесса в среднем квадратичном, почти наверное, по вероятности и по распределению. Критерии с.к.-непрерывности, с.к.-дифференцируемости и с.к.-интегрируемости по Риману. С.к.-интеграл Римана—Стилтьеса по случайному процессу и критерий его существования.
5. Эргодические по математическому ожиданию (дисперсии, корреляционной функции) в среднем квадратичном случайные процессы. Критерий и достаточное условие эргодичности по математическому ожиданию в среднем квадратичном.
6. Стационарные процессы в узком и широком смыслах. Свойства корреляционной функции стационарных процессов. Теорема Крамера о спектральном представлении стационарного случайного процесса. Теорема Хинчина о спектральном представлении корреляционной функции случайного процесса. Спектральная функция и спектральная плотность случайного процесса, их свойства и приложения. Случайный процесс типа «белый шум». Спектральная плотность с.к.-производной стационарного процесса.
7. Марковский случайный процесс. Дискретная марковская цепь. Переходные вероятности, уравнения Колмогорова—Чепмена. Однородные дискретные марковские цепи. Классификация состояний дискретной марковской цепи, теорема о «солидарности» их свойств. Эргодические дискретные цепи Маркова, критерий эргодичности, теорема о предельном распределении. Закон больших чисел для марковских цепей.

8. Непрерывная марковская цепь. Переходные вероятности, уравнения Колмогорова—Чепмена. Стандартная непрерывная марковская цепь. Прямые и обратные уравнения Колмогорова эволюции матрицы перехода цепи и распределения вероятностей состояний цепи. Q-матрица непрерывной марковской цепи. Время пребывания в состоянии и вероятности перехода между состояниями в момент прыжка. Эргодические непрерывные цепи Маркова, критерий эргодичности.

9. Процессы гибели и рождения. Взрывные непрерывные цепи Маркова. Потoki событий, свойства однородности, ординарности и отсутствия последействия. Системы массового обслуживания. Эквивалентные определения пуассоновского процесса.

10. Непрерывный марковский процесс. Переходная функция, уравнение Колмогорова—Чепмена. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы нормальный (гауссовский) процесс был марковским процессом. Диффузионные процессы, прямые и обратные уравнения Колмогорова. Винеровский процесс как непрерывный марковский процесс.