Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Московский физико-технический институт

(государственный университет»

УТВЕРЖДЕНО

Проректор по учебной работе

и довузовской подготовке

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_А.А. Воронов

14 января 2019 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

по направлению подготовки:

**03.03.01 «Прикладные математика и физика»**

физтех-школа: **ФПМИ**

кафедра: **математических основ управления**

курс: 3

семестры: 6

Трудоёмкость:

вариативная часть – 3 зач. ед.,

лекции – 30 часов Экзамен – 6 семестр

практические (семинарские)   
занятия – 30 часов

лабораторные занятия – нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа

– 45 часов

# Программу составили

д.ф.-м.н., доцент А.В. Гасников, к.ф.-м.н., доцент А.В. Чернов, ассистент Д.И. Камзолов, ассистент А.М. Катруца,

ассистент Д.М. Меркулов

Программа принята на заседании

кафедры математических основ управления

11 января 2019 года

Заведующий кафедрой С. А. Гуз

**Часть 2. Численные методы**

1. Понятие о численных методах оптимизации. Метод градиентного спуска. Сложность задач оптимизации. Сильно выпуклые задачи, выпуклые (вырожденные) задачи, невыпуклые задачи. Гладкие, негладкие задачи. Регуляризация и рестарты. О возможности вычислять градиент и автоматическом дифференцировании. Приложение к задаче оптимального управления. (2 лекции)

2. Невыпуклая оптимизация. Условие Поляка – Лоясиевича (ПЛ) и глобальная сходимость градиентного спуска. Пример: сведение решения системы нелинейных уравнений к задаче оптимизации с условием ПЛ. Сходимость градиентного спуска к локальному экстремуму. Принцип множителей Лагранжа и теорема о неявной функции. Выпуклая оптимизация (напоминание основных фактов из прошлого семестра). Принцип множителей Лагранжа и теорема об отделимости точки от выпуклого множества гиперплоскостью (без доказательства).

3. Двойственная задача. Слабая и сильная двойственность для задач выпуклой оптимизации. Теорема о минмаксе (Фон Неймана, Сион-Какутани) (без доказательства). Седловые задачи. Коническая двойственность. Теоремы об альтертнативах (Фаркаш) и их следствия (основная теорема финансовой математики об отсутствии арбитража; робастная оптимизация). Понятие о прямодвойственных методах на примере решения задачи минимизации выпуклого сепарабельного функционала с аффинными ограничениями с помощью перехода к двойственной задаче и ее решения методом градиентного спуска.

4. Унимодальные функции одной переменной. Методы одномерной минимизации (метод дихотомии, метод золотого сечения, метод Фибоначчи). Задача о распределении ресурсов. Методы маломерной оптимизации: метод центров тяжести, метод эллипсоидов.

5. Способы выбора шага в методах. Наискорейший спуск. Правило Армихо и правило Голдстейна. Адаптивный способ выбора шага. Сопряженные направления. Метод сопряженных градиентов для минимизации квадратичных функций. Метод сопряженных градиентов для решения задач выпуклой оптимизации. Метод тяжелого шарика Поляка. Ускоренный градиентный метод (в разных вариантах: линейный каплинг, метод подобных треугольников). Новый ускоренный градиентный метод (на базе метода линейного каплинга) с одномерными минимизациями.

6. Задачи оптимизации на множествах простой структуры. Дивергенция Брэгмана. Метод проекции (суб-)градиента, метод зеркального спуска. Метод условного градиента (Франк – Вульфа). Пример задачи минимизации разреженной квадратичной формы на единичном симплексе.

7. Концепция (неточной) модели функции. Композитная оптимизация. Универсальный градиентный спуск и его ускоренный вариант. Проксимальный градиентный спуск. Ускоренный проксимальный метод (в варианте Монтейро – Свайтера). Каталист – общий способ ускорения различных неускоренных методов.

8. Метод Ньютона. Квазиньютоновские методы (LBFGS). Метод Ньютона с кубической регуляризацией. Тензорные методы. Ускоренные тензорные методы.

9. Стохастическая оптимизация. Минибатчинг и распараллеливание. Рандомизированные методы на примере покомпонентных и безградиентных методов. Задача минимизации суммы функций.

10. Общая схема метода штрафных функций. Метод модифицированной функции Лагранжа. Методы внутренней точки. Понятие самосогласованного барьера. Методы параметризации целевых функций. Методы отслеживания центральной траектории.

11.\* Распределенная оптимизация на примере решения задач выпуклой оптимизации функционалов вида суммы функций.

12.\*\*Численные методы оптимизации на службе статистики и машинного обучения. Принцип максимального правдоподобия и метод Поляка – Юдицкого, адаптивные методы стохастической оптимизации (эта лекция не входит в основную программу; она будет прочитана только в случае наличия времени).

Литература

*Основная*

1. *Гасников А.В.* Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска*.* 2-е изд., М.: МФТИ, 2018. 241 с.
2. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1711/1711.00394.pdf>

Презентации к некоторым частям курса доступны по ссылке (наиболее важными являются презентации 1 – 4)

<https://www.mccme.ru/dubna/2017/courses/gasnikov.html>

2. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: ЛЕНАНД, 2014.

3. *Boyd S.*, *Vandenberghe L.* Convex optimization. – Cambridge University Press, 2004.

4. *Bubeck S.* Convex optimization: algorithms and complexity // Foundations and Trends in Machine Learning. – 2015. – V. 8, N 3–4. – P. 231–357.

5. *Nemirovski A.* Advanced Nonlinear Programming // Lectures, ISyE 7683 Spring 2019. – URL:

<https://www2.isye.gatech.edu/~nemirovs/Trans_ModConvOpt.pdf>

*Дополнительная*

6. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 2008.

7. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 2011.

8. *Измайлов А.Ф., Солодов М.В.* Численные методы оптимизации. – М.: Физматлит, 2003.

9. *Nocedal J.*, *Wright S.* Numerical optimization. – Springer, 2006.

10. *Жадан В.Г.* Методы оптимизации. Часть I. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации. – М.: МФТИ, 2014.

11. *Жадан В.Г.* Методы оптимизации. Часть II. Численные алгоритмы. – М.: МФТИ, 2015.

12. *Бирюков А.Г.* Методы оптимизации. Условия оптимальности в экстремальных задачах. – М.: МФТИ, 2010.

13. *Галеев Э.М.* Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. – М.: КомКнига, УРСС, 2006.

14. *Нестеров Ю.Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. – М.: МЦНМО, 2010.

15. *Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М.*  Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978.

16. *Евтушенко Ю.Г.* Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование. – М.: ВЦ РАН, 2013. – 144 с. – URL: <http://www.ccas.ru/personal/evtush/p/198.pdf>

17. *Ашманов С.А., Тимохов А.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1991.

18. *Гасников А.В*. Оптимизация и анализ данных // Курс лекций в Адыгейском государственном университете. – Кавказский математический центр, 26 – 30ноября 2018 г. – URL:

ttps://www.youtube.com/playlist?list=PLVdkATzj9WQM9kWYzdED3aBVW3 FrnU64

19. <https://github.com/amkatrutsa/MIPT-Opt>

20. [http://nbviewer.jupyter.org/github/merkulovdaniil/mipt\_](http://nbviewer.jupyter.org/github/merkulovdaniil/mipt_optimization/tree/master/)

optimization/tree/master/

Номера упражнений в заданиях указаны по пособию [1].

**ЗАДАНИЕ № 1**

Упражнения 1.3, 1.4\*, 1.6\*, 2.1\*, 2.3\*, 2.6\*, 2.7\*, 3.1, 3.2, 3.7\*, 3.8\*.

1. Найти стационарные точки и точки экстремума функции

.

Сделать по одному шагу методом наискорейшего спуска (НС) из начальных точек

.

Оценить значение коэффициента скорости сходимости в методе НС для итерационных процессов, для которых



 – точки локальных минимумов, к которым сходится метод НС из указанных точек . Найти предельное значение коэффициента скорости сходимости.

2. Для решения задачи  при условии  с *ε*-точностью методами дихотомии, золотого сечения и Фибоначчи найти число вычислений функции для *ε* = 10–7и *ε* = 10–10.

3. Какую скорость сходимости к точке минимума имеет метод Ньютона при минимизации функций  если



где  

Сделать для задачи а) один шаг метода Ньютона с регулировкой шага и выбором длины шага из условия одномерной минимизации. Что можно сказать о скорости сходимости метода Ньютона с регулировкой шага и выбором длины шага из условия одномерной минимизации для задачи б)?

1. Пусть векторы  – линейно независимы,  Построим систему векторов 



при этом система  такова, что  

Доказать, что векторы , сопряжены относительно матрицы , а также справедливо соотношение

 (\*)

Используя формулу (\*), решить систему линейных уравнений (\*\*) предварительно ее симметризовав, для





5. Показать, что в методе сопряженных градиентов для квадратичной функции на каждом k-м шаге при  в точке реализуется минимум функции  на аффинном множестве



6. Определить скорость сходимости метода Ньютона и метода наискорейшего спуска и окрестность, из которой эти методы сходятся к оптимальному решению следующей задачи:



***Замечание.*** При решении задачи замену переменных  не использовать.

7. Найти минимум функции методом Ньютона и методом сопряженных градиентов, где



8. Найти  при условиях:  методом множителей Лагранжа. Построить для данной задачи двойственную и решить ее. Сравнить решения этих задач.

9. Для задачи достаточно гладкая функция, сформулировать необходимые условия экстремума, если



Сформулировать для указанных задач достаточные условия экстремума первого порядка, второго порядка, достаточные условия острого экстремума. Сформулировать для задачи математического программирования необходимые и достаточные условия оптимальности первого и второго порядков.

10. Дана система линейных уравнений



Что можно сказать о множестве решений

 при  Возьмем функцию  и рассмотрим задачу БМ: Найти  Когда существует решение этой задачи  Когда  Построить схемы метода Ньютона, наискорейшего спуска и метода сопряженных градиентов для задачи БМ. Если не единственно, то как можно найти численно все точки 

**ЗАДАНИЕ № 2**

Упражнения 4.1, 4.2, 4.3\*, 4.4\*, 4.6\*, 4.7, 4.8\*, 5.5\*, 5.7\*, 5.9

1. Для задачи ЛП



построить двойственную задачу, решить её, после чего решить прямую задачу.

2. Найти решение задачи



зависящее от параметров 

3. Следующую задачу линейного программирования решить табличным симплекс-методом :



Найти решение соответствующей двойственной задачи.

***Указание***. Конкретные значения параметров *A* и *B* получить у своего преподавателя.

1. Пусть матрица  Методом внешних штрафных функций решить задачу 1:  при условии   Методом внутренних штрафных функций решить задачу 2:  при условии  .

5. Решить методом точных внешних штрафных функций задачу: найти



6. Методом условного градиента решить задачу: найти 

 при условиях    Начальная точка *x*0 = (1, 0). Длина шага *a* вдоль направления *h* определяется из условия одномерной максимизации.

1. Методом проекции градиента решить задачу  при условиях:  Начальная точка 

8. Методом возможных направлений решить следующую задачу:  при условиях:   Начальная точка 

9. Методом модифицированных функций Лагранжа решить задачи.



 где  и  значения параметров  взять у своего преподавателя.

Найти предельное значение множителя Лагранжа  Оценить коэффициенты скорости сходимости последовательностей 

***Указание***. При необходимости воспользоваться формулами из задачи № 11, задание № 1.

10. Методом параметризации целевой функции решить задачу  при условии  

Подписано в печать 17.01.2019. Формат 60 × 84 1/16. Усл. печ. л. 0,75

Уч.-изд. л. 0,7. Тираж 160 экз. Заказ № .

Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования   
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-58-22, e-mail: [rio@mipt.ru](mailto:rio@mipt.ru)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-84-30, e-mail: [polygraph@mipt.ru](mailto:polygraph@mipt.ru)