Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждние

высшего образования

«Московский физико-технический институт

(государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

и довузовской подготовке

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_А.А. Воронов

30.05.2019 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

по направлению подготовки:

**03.03.01 «Прикладные математика и физика»**

физтех-школа: **ФПМИ**

кафедра: **математических основ управления**

курс: 3

семестры: 5

Трудоёмкость:

вариативная часть – 3 зач. ед.,

лекции – 30 часов Экзамен – 5 семестр

практические (семинарские)   
занятия – 30 часов

лабораторные занятия – нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа

– 45 часов

# Программу составил

д. ф.-м. н., проф. К. Ю. Осипенко

Программа принята на заседании

кафедры математических основ управления

17 мая 2019 года

Заведующий кафедрой С. А. Гуз

**Часть I. Выпуклый анализ**

1. Выпуклые множества. Выпуклая оболочка. Аффинное подпространство. Аффинная оболочка. Размерность множества.
2. Теорема Каратеодори. Теорема о выпуклой оболочке компакта в конечномерном пространстве.
3. Коническая оболочка. Теорема Каратеодори для конической оболочки.
4. Теорема Радона.
5. Теорема Хелли.
6. Выпуклые функции. Условия выпуклости. Теорема Каруша – Куна–Таккера.
7. Субдифференциал. Субдифференциал нормы.
8. Субдифференциал выпуклой дифференцируемой функции. Теорема Ферма в субдифференциальной форме.
9. Субдифференциальное исчисление. Теорема Моро–Рокафеллара.
10. Теорема Дубовицкого–Милютина.
11. Субдифференциальная форма теоремы Каруша–-Куна–Таккера.
12. Двойственное описание выпуклых замкнутых множеств.
13. Теорема о поточечной верхней грани аффинных функций.
14. Сопряженная функция. Теорема Фенхеля–Моро.
15. Двойственность экстремальных задач. Задача линейного программирования в нормальной форме и двойственная к ней.
16. Теорема о замкнутости конечнопорожденного конуса.
17. Теорема о существовании решения задачи линейного программирования.
18. Теорема о двойственности для задачи линейного программирования.
19. Различные формы задач линейного программирования и соответствующие двойственные задачи.
20. Выпуклый анализ и теория линейных неравенств. Теорема Минковского–-Фаркаша.
21. Теорема Ки Фаня.
22. Теорема Гейла.
23. Примеры задач линейного программирования. Задача оптимального планирования производства и транспортная задача.
24. Задача на минимакс.
25. Крайние точки в задаче линейного программирования
26. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Случай и случай .
27. Симплекс-метод решения задач линейного программирования (основная теорема).
28. Метод искусственного базиса для нахождения начальной крайней точки.
29. Транспортная задача. Замкнутая модель. Сведение незамкнутых моделей к замкнутым.
30. Существование оптимального плана перевозок в транспортной задаче.
31. Свойства матрицы ограничений в транспортной задаче (ранг, линейная независимость строк).
32. Методы нахождения начальной крайней точки в транспортной задаче.
33. Доказательство того, что первоначальный план перевозок, получаемый по методам «северо-западного угла», минимума по матрице, строке или столбца, приводит к крайней точке.

Литература

*Основная*

1. *Осипенко К.Ю.* Выпуклый анализ. Курс лекций, 2016. (<http://new.math.msu.su/department/opu/node/434>)
2. *Осипенко К.Ю.* Вариационное исчисление и оптимальное управление. Курс лекций, 2017. (<http://new.math.msu.su/department/opu/node/464>)
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и фукционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
4. *Протасов В.Ю.* Выпуклый анализ. Курс лекций, 2009. (<http://new.math.msu.su/department/opu/node/354>)
5. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2007.
6. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: УРСС, 2003.
7. *Галеев Э.М.* Оптимизация: Теория, примеры, задачи: учебное пособие. М.: Либроком, 2010.

*Дополнительная литература*

1. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 2008.
2. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 2011.
3. *Измайлов А.Ф., Солодов М.В.* Численные методы оптимизации. – М.: Физматлит, 2003.
4. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: ЛЕНАНД, 2014.
5. *Жадан В.Г.* Методы оптимизации. Часть I. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации. – М.: МФТИ, 2014.
6. *Жадан В.Г.* Методы оптимизации. Часть II. Численные алгоритмы. – М.: МФТИ, 2015.
7. *Бирюков А.Г.* Методы оптимизации. Условия оптимальности в экстремальных задачах. – М.: МФТИ, 2010.
8. *Галеев Э.М.* Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. – М.: КомКнига, УРСС, 2006.
9. *Нестеров Ю.Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. – М.: МЦНМО, 2010.
10. *Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М.*  Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978.
11. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982.
12. *Ашманов С.А., Тимохов А.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1991.

**ЗАДАНИЕ № 1**

1. Доказать, что если и – выпуклые множества, то тоже выпуклое множество.
2. Привести пример невыпуклых множеств и таких, что является выпуклым множеством.
3. Построить пример замкнутого множества, выпуклая оболочка которого не является замкнутым множеством.
4. Доказать, что замыкание выпуклого множества является выпуклым.
5. Доказать, что .
6. Доказать, что -мерный симплекс в содержит внутреннюю точку.
7. Пусть – выпуклое множество размерности . Доказать, что содержит внутреннюю точку.
8. При каких множество

является выпуклым?

1. При каких множество

является выпуклым?

1. Выяснить, являются ли выпуклыми функции
   1. .
2. Привести пример выпуклой функции такой, что не является выпуклой.
3. Привести пример двух выпуклых функций, суперпозиция которых не является выпуклой.
4. Решить задачу:
5. Решить задачу:

**ЗАДАНИЕ № 2**

1. Вычислить :
2. Привести пример выпуклой замкнутой функции и точки , таких, что , .
3. Решить задачу:
4. Решить задачу:
5. Найти сопряженные функции от следующих функций:
   1. ,
6. Найти сопряженные функции от следующих функций:
   1. ,
   2. .
7. Найти вторые сопряженные функции от следующих функций:
   1. ,
   2. ,
   3. ,
   4. .
8. Вывести двойственную задачу для задачи линейного программирования

,

с помощью преобразования Лежандра.

1. Свести задачу линейного программирования в общей форме:

к задаче линейного программирования в канонической форме:

.

1. Решить задачу линейного программирования

,

,

с заданной начальной крайней точкой .

1. Решить задачу линейного программирования

,

,

1. Решить транспортную задачу, находя первоначальный план методом «северо-западного угла» и методом «минимума по матрице»:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

1. Решить транспортную задачу из предыдущего примера методом потенциалов, находя первоначальный план методом «северо-западного угла».

Подписано в печать 20.08.2018. Формат 60 × 84 1/16. Усл. печ. л. 0,5

Уч.-изд. л. 0,4. Тираж 160 экз. Заказ № 237.

Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования   
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-58-22, e-mail: [rio@mipt.ru](mailto:rio@mipt.ru)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-84-30, e-mail: [polygraph@mipt.ru](mailto:polygraph@mipt.ru)