

Министерство науки и образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
и довузовской подготовке  
\_\_\_\_\_ А.А. Воронов  
2020 г.

## ПРОГРАММА

по дисциплине: **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

по направлению подготовки:

**03.03.01 «Прикладная математика и физика»**

физтех-школа: **ФПМИ**

кафедра: **математических основ управления**

курс: 3

семестры: 6

Трудоёмкость:

вариативная часть – 3 зач. ед.,

по выбору студента – 1 зач. ед.,

лекции – 30 часов

Экзамен – 6 семестр

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

лабораторные занятия – нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60

Самостоятельная работа  
– 5 часов

Программу составил

д.ф.-м.н., доцент А.В. Гасников, к.ф.-м.н., доцент А.В. Чернов,  
ассистент Д.И. Камзолов, ассистент А.М. Катруца,  
ассистент Д.М. Меркулов

Программа принята на заседании

кафедры математических основ управления

24 января 2020 года

Заведующий кафедрой

С. А. Гуз

## Часть 2. Численные методы

1. Понятие о численных методах оптимизации. Метод градиентного спуска. Сложность задач оптимизации. Сильно выпуклые задачи, выпуклые (вырожденные) задачи, невыпуклые задачи. Гладкие, негладкие задачи. Регуляризация и рестарты. О возможности вычислять градиент и автоматическом дифференцировании. Приложение к задаче оптимального управления. (2 лекции)
2. Невыпуклая оптимизация. Условие Поляка-Лоясиевича (ПЛ) и глобальная сходимость градиентного спуска. Пример: сведение решение системы нелинейных уравнений к задаче оптимизации с условием ПЛ. Сходимость градиентного спуска к локальному экстремуму. Принцип множителей Лагранжа и теорема о неявной функции. Выпуклая оптимизация (напоминание основных фактов из прошлого семестра). Принцип множителей Лагранжа и теорема об отделимости точки от выпуклого множества гиперплоскостью (без доказательства).
3. Двойственная задача. Слабая и сильная двойственность для задач выпуклой оптимизации. Теорема о минмаксе (Фон Неймана, Сион-Какутани) (без доказательства). Седловые задачи. Коническая двойственность. Теоремы об альтернативах (Фаркаш) и их следствия (основная теорема финансовой математики об отсутствии арбитража; робастная оптимизация). Понятие о прямо-двойственных методах на примере решение задачи минимизации выпуклого сепарабельного функционала с аффинными ограничениями с помощью перехода к двойственной задаче и ее решения методом градиентного спуска.
4. Унимодальные функции одной переменной. Методы одномерной минимизации (метод дихотомии, метод золотого сечения, метод Фибоначчи). Задача о распределении ресурсов. Методы маломерной оптимизации: метод центров тяжести, метод эллипсоидов.
5. Способы выбора шага в методах. Наискорейший спуск. Правило Армихо и правило Голдстейна. Адаптивный способ выбора шага. Сопряженные направления. Метод сопряженных градиентов для минимизации квадратичных функций. Метод сопряженных градиентов для решения задач выпуклой оптимизации. Метод тяжелого шарика Поляка. Ускоренный градиентный метод (в разных вариантах: линейный каплинг, метод подобных

- треугольников). Новый ускоренный градиентный метод (на базе метода линейного каплинга) с одномерными минимизациями.
6. Задачи оптимизации на множествах простой структуры. Дивергенция Брэгмана. Метод проекции (суб-)градиента, метод зеркального спуска. Метод условного градиента (Франк-Вульфа). Пример задачи минимизации разреженной квадратичной формы на единичном симплексе.
  7. Концепция (неточной) модели функции. Композитная оптимизация. Универсальный градиентный спуск и его ускоренный вариант. Проксимальный градиентный спуск. Ускоренный проксимальный метод (в варианте Монтейро-Свайтера). Каталист - общий способ ускорения различных неускоренных методов.
  8. Метод Ньютона. Квазиньютоновские методы (LBFGS). Метод Ньютона с кубической регуляризацией. Тензорные методы. Ускоренные тензорные методы.
  9. Стохастическая оптимизация. Минибатчинг и распараллеливание. Рандомизированные методы на примере покомпонентных и безградиентных методов. Задача минимизации суммы функций.
  10. Общая схема метода штрафных функций. Метод модифицированной функции Лагранжа. Методы внутренней точки. Понятие самосогласованного барьера. Методы параметризации целевых функций. Методы отслеживания центральной траектории.
  - 11.\* Распределенная оптимизация на примере решения задач выпуклой оптимизации функционалов вида суммы функций.
  - 12.\*\*Численные методы оптимизации на службе статистики и машинного обучения. Принцип максимального правдоподобия и метод Поляка-Юдицкого, адаптивные методы стохастической оптимизации. (эта лекция не входит в основную программу; она будет рассказан только в случае наличия времени)

## Литература

### Основная

1. *Гасников А.В.* Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска. – М.: МФТИ, 2018. - 241 с. 2-е изд.  
<https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1711/1711.00394.pdf>

Презентации к некоторым частям курса доступны по ссылке (наиболее важными являются презентации 1-4)

<https://www.mccme.ru/dubna/2017/courses/gasnikov.html>

2. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. Изд. 2-ое, испр. и доп. – М.: ЛЕНАНД, 2014.
3. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex optimization. – Cambridge University Press, 2004.
4. *Bubeck S.* Convex optimization: algorithms and complexity // Foundations and Trends in Machine Learning. – 2015. – V. 8, N 3–4. – P. 231–357.
5. *Nemirovski A.* Advanced Nonlinear Programming // Lectures, ISyE 7683 Spring 2019. – URL:

[https://www2.isye.gatech.edu/~nemirovs/Trans\\_ModConvOpt.pdf](https://www2.isye.gatech.edu/~nemirovs/Trans_ModConvOpt.pdf)

#### *Дополнительная литература*

6. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 2008.
7. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 2011.
8. *Измайлов А.Ф., Солодов М.В.* Численные методы оптимизации. – М.: Физматлит, 2003.
9. *Nocedal J., Wright S.* Numerical optimization. – Springer, 2006.
10. *Жадан В.Г.* Методы оптимизации. Часть I. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации. – М.: МФТИ, 2014.
11. *Жадан В.Г.* Методы оптимизации. Часть II. Численные алгоритмы. – М.: МФТИ, 2015.
12. *Бирюков А.Г.* Методы оптимизации. Условия оптимальности в экстремальных задачах. – М.: МФТИ, 2010.
13. *Галеев Э.М.* Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. – М.: КомКнига, УРСС, 2006.
14. *Нестеров Ю.Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. – М.: МЦНМО, 2010.
15. *Моисеев Н.Н., Иванюков Ю.П., Столярова Е.М.* Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978.
16. *Евтушенко Ю.Г.* Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование. – М.: ВЦ РАН, 2013. – 144 с. – URL: <http://www.ccas.ru/personal/evtush/p/198.pdf>
17. *Ашманов С.А., Тимохов А.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1991.

18. *Гасников А.В.* Оптимизация и анализ данных // Курс лекций в Адыгейском государственном университете. – Кавказский математический центр, 26–30 ноября 2018 г. – URL:

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLVdkATzj9WQM9kWYzdED3aBVW3FrnU64>

19. <https://github.com/amkatrutsa/МИПТ-Opt>  
20. [http://nbviewer.jupyter.org/github/merkulovdaniil/mipt\\_optimization/tree/master/](http://nbviewer.jupyter.org/github/merkulovdaniil/mipt_optimization/tree/master/)

Номера задач в заданиях указаны по пособию [1].

## **ЗАДАНИЕ № 1**

Упражнения 1.3, 1.4, 1.6, 2.1, 2.3, 2.6, 2.7, 3.1, 3.2, 3.7, 3.8.

## **ЗАДАНИЕ № 2**

Упражнения 4.1 - 4.4, 4.6 - 4.8, 5.5, 5.7, 5.9

Возможно добавление заданий по выбору преподавателя.

Подписано в печать 01.02.2020. Формат 60 × 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Усл. печ. л. 0,5  
Уч.-изд. л. 0,4. Тираж 160 экз. Заказ № .

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: [rio@mipt.ru](mailto:rio@mipt.ru)

---

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: [polygraph@mipt.ru](mailto:polygraph@mipt.ru)