Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО

Проректор по учебной работе

А.А. Воронов

«\_\_\_» августа 2023 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЛОГИКУ**

по направлению подготовки:

**03.03.01 «Прикладные математика и физика»**

физтех-школа: **ФПМИ**

кафедра: **математических основ управления**

курс: 2

семестры: 3

Трудоёмкость:

вариативная часть – 3 зач. ед.,

лекции – 30 часов Экзамен – 3 семестр

практические (семинарские)   
занятия – 30 часов

лабораторные занятия – нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа

– 45 часов

# Программу составили:

к. ф.-м. н., доцент Вялый М.Н., к.ф.-м.н. Зухба А.В., к.ф.-м.н. Шестаков С.А.

Программа принята на заседании

кафедры математических основ управления

12 мая 2023 года

Заведующий кафедрой А.В. Гасников

**Введение в математическую логику**

1. Булевы функции. Совместные и несовместные множества функций. Лемма о дереве и теорема компактности. Семантическое следствие. Булевы формулы. Представление формулы в виде дерева. Алгоритмы разбора формулы и вычисления значения формулы. Тавтологии и выполнимые формулы.
2. Алгебра предикатов. Модели. Выразимость предикатов.
3. Формулы логики первого порядка. Правила оценки формулы. Алгоритм разбора формулы первого порядка. Свободные и связанные вхождения переменных в формулы. Замкнутые формулы.
4. Теории и модели теорий. Семантическое следствие.
5. Общезначимые и равносильные формулы. Равносильные преобразования формул: замена подформулы на равносильную замены переменных, перестановки связок и кванторов, перестановки кванторов. Предваренная нормальная форма.
6. Метод автоморфизмов доказательства невыразимости предикатов.
7. Бескванторные формулы, элиминация кванторов. Примеры моделей, допускающих элиминацию кванторов.
8. Элементарная эквивалентность моделей. Игры Эренфойхта. Критерий элементарной эквивалентности.
9. Применение игр Эренфойхта для доказательства невыразимости предикатов.
10. Исчисление высказываний (ИВ). Правило modus ponens. Выводимые формулы. Условный вывод (вывод из множества гипотез).
11. Корректность ИВ. Непротиворечивость ИВ.
12. Теорема дедукции. Лемма оценки (лемма Кальмара).
13. Полные и непротиворечивые множества формул. Полнота ИВ.
14. Исчисление предикатов, аксиомы, правила вывода. Корректность ИП. Полнота ИП (без доказательства).
15. Правило резолюций и исчисление резолюций для булевых формул. Корректность и полнота. (Полиномиальная) сводимость задачи проверки выполнимости булевой формулы к задаче выполнимости КНФ.
16. Исчиcление резолюций и проверка общезначимости. Сколемизация. Универсальные дизъюнкты, исчисление резолюций для универсальных дизъюнктов (ИР). Корректность и полнота ИР.
17. Формальная математика. Существование нестандартных моделей арифметики Пеано.
18. Перечислимость множества общезначимых формул. Перечислимость формул, выводимых из перечислимого множества аксиом и правил вывода.
19. Ассоциативные исчисления. Неразрешимость проблемы достижимости в общем случае и в симметрических исчислениях.
20. Неразрешимость проблемы равенства в конечно порождённых полугруппах. Неразрешимость множества общезначимых формул.
21. Выразимость в арифметике, бета-функция Гёделя. Теорема Тарского: неперечислимость истинных в арифметике формул.
22. Семантическая и синтаксическая версии теоремы Гёделя о неполноте.

**Литература**

*Основная*

1. *Журавлев Ю.И., Флеров Ю.А., Вялый М.Н.* Дискретный анализ. Формальные системы и алгоритмы. – Москва : ООО КонтактПлюс, 2010.
2. *Верещагин Н.К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Начала теории множеств. Изд. 4-е. – Москва : МЦНМО, 2012.
3. *Верещагин Н.К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 2. Языки и исчисления. – Москва : МЦНМО, 2012.
4. *Верещагин Н.К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 3. Вычислимые функции. Изд. 4-е. – Москва : МЦНМО, 2012.
5. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. – Москва : Наука, 1984.

*Дополнительная литература*

1. *Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, математический логике и теории алгоритмов. – Москва : Физматгиз, 2004.
2. *Успенский В.А.* Теорема Гёделя о неполноте и четыре дороги, ведущие к ней // Математическое просвещение. 2011. № 3, вып. 15. – С. 35–75.
3. *Беклемишев Л.Д.*, Теоремы Гёделя о неполноте и границы их применимости. I //  УМН. 2010. – Т. 65, №:5 (395). – С. 61–106.
4. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. – Москва, 1983.

**ЗАДАНИЕ**

1. Являются ли тавтологиями следующие булевы формулы:

а)



б)



в)



г)



1. Докажите, что если в булеву формулу каждая переменная входит лишь один раз, то эта формула не является тавтологией.
2. Пусть Г – множество булевых формул, имеющих вид



где *A* – любая формула. Является ли формула *x* семантическим следствием множества формул Г?

1. Может ли формула первого порядка



выражать в некоторой интерпретации на целых числах предикат «*xy* = 0»?

1. Найдите формулу первого порядка, которая истинна в любой конечной модели, но ложна в некоторой бесконечной модели.
2. Является ли общезначимой формула



1. Укажите такие терм *t* и формулу *A* с одним параметром, что формула не является общезначимой.



1. В модели арифметики носитель – множество неотрицательных целых чисел, бинарные предикаты сравнения чисел и равенства чисел, функции сложения и умножения, а также константы 0, 1. Выразите в этой модели предикаты: а) «число *x* является степенью 2»; б) «число *x* простое»; в) «число *x* является степенью 10».
2. Докажите невыразимость предиката «слово *w* является квадратом» в модели, носитель которой – двоичные слова, а единственный бинарный предикат в модели – «слово *u* является префиксом слова *v*.
3. Докажите, что формула не эквивалентна никакой бескванторной формуле в модели (Z,=,<,0,1).
4. Являются ли элементарно эквивалентными модели «целые числа со сравнением» и «рациональные числа со сравнением»?
5. Может ли быть аксиомой исчисления высказываний формула вида где *А*, *В*, *С* – некоторые формулы?



1. Постройте вывод формул в исчислении высказываний, не используя теорему о полноте (разрешается ссылаться на теорему дедукции):

а)



б)



в)



г)



1. Множество Г формул исчисления высказываний таково, что из него нельзя вывести любую формулу исчисления высказываний, но из множества уже можно вывести любую формулу исчисления высказываний. Следует ли из этого, что из множества Г можно вывести формулу (*x, y* – переменные).



1. Постройте опровержение резолюциями для КНФ



1. Проверьте методом резолюций выполнимость КНФ



1. Проверьте методом резолюций общезначимость формулы



1. Докажите, что существует алгоритм проверки равенства слов для полугруппы с двумя порождающими *a*, *b* и соотношением *aba* = *bab.* Оцените время работы такого алгоритма в зависимости от длины сравниваемых слов.
2. Ассоциативное исчисление содержит только правила преобразования слов вида *w → a,* где *а* – символ алфавита, w – непустое слово. Докажите, что проблема достижимости для такого исчисления алгоритмически разрешима.
3. Докажите, что алгоритмически неразрешима проблема достижимости для ассоциативных исчислений в алфавите из двух символов.
4. Разрешимо ли множество таких общезначимых формул первого порядка, что в формуле (а) нет функциональных символов, а все предикатные символы – унарные; (б) все предикатные и все функциональные символы – унарные?
5. Перечислимо ли множество замкнутых выполнимых формул первого порядка (выполнимая формула истинна хотя бы в одной интерпретации)?
6. Перечислимо ли множество замкнутых формул первого порядка, которые истинны хотя бы в одной интерпретации на конечной области?

Подписано в печать 30.08.2023. Формат 60  84 1/16. Усл. печ. л. 0,5

Уч.-изд. л. 0,4. Тираж 140 экз. Заказ № 151.

Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования   
«Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет)»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-58-22, e-mail: [rio@mipt.ru](mailto:rio@mipt.ru)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-84-30, e-mail: [polygraph@mipt.ru](mailto:polygraph@mipt.ru)