Введение
в теорию управления системами
с распределенными параметрами

Егоров А. И., Знаменская Л. Н.

УДК 517.2, 519.7, 62-50,
531.36, 681.5
ББК 22.161.6
Е30

Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами. — 288 с. Книга посвящена основным разделам теории управления системами с распределенными параметрами. Решаются задачи (управляемость, наблюдаемость и оптимальность) для линейных параболических и гиперболических систем. Рассмотрены также смешанные системы, описываемые совокупностью уравнений в обыкновенных и частных производных. Задачи оптимального управления исследуются с помощью принципа максимума, динамического программирования и моментных соотношений. Анализируется проблема конечномерной аппроксимации. Приведены конкретные примеры.

Книга предназначена аспирантам, научным работникам и может быть использована как учебное пособие студентами при изучении теории управления системами с распределенными параметрами.

Оглавление

Предисловие

Теория управления системами с распределенными параметрами в последние годы обогатилась новыми идеями и новыми результатами. Год от года публикуется все больше работ по различным ее разделам. Однако многие важные вопросы теории недостаточно полно разработаны даже для линейных систем. К ним прежде всего относятся вопросы управляемости, наблюдаемости и оптимальности. Их анализу посвящена эта книга. Рассматриваются различные задачи для уравнений теплопроводности и колебаний упругого стержня и балки. Анализируются разнообразные примеры.

Часть материала этой книги А.И. Егоров использовал при чтении лекций по курсу «Теория управления системами с распределенными параметрами» для студентов факультета управления и прикладной математики Московского физико-технического института (государственного университета) и искренне признателен декану факультета, проф. А.А. Шананину, заведующему кафедрой математических основ управления, доценту С.А. Гузу и доценту той же кафедры О.С. Федько за внимание и поддержку.

А.И. Егоров,
Л.Н. Знаменская

Введение

Несмотря на обилие научных публикаций по теории управления системами с распределенными параметрами остаются не решенными или недостаточно полно исследованными многие вопросы основ этой теории. К ним относятся различные задачи теории управления линейными системами, вопросы приближенного решения ряда линейно-квадратичных задач оптимального управления. В этой книге сделана попытка ответить на некоторые из этих вопросов.

Задачи управления системами с распределенными параметрами (СРП) имеют давнюю историю. Ими начали заниматься практически с самого зарождения науки под названием теория управления. Все это происходило потому, что такие задачи ставила перед учеными практика. Одна из ранних задач описана в учебнике по теории автоматического регулирования еще в середине прошлого века[1]. Она посвящена автоматическому регулированию подачи газа из трубы к потребителю. Приведена математическая формулировка задачи и ее анализ. Задачи подобного типа представляют значительный интерес и в других отраслях инженерной практики (см., например, [**3**], [**6**], [**8**], [**11**], [**16**], [**23**], [**24**], [**25**], [**56**], [**164**], [**216**], [**218**], [**221**], [**321**]). Представляют также большой интерес различные задачи управления взаимодействующими процессами с распределенными параметрами. Таковыми являются, например, сушка влажных материалов [**164**] и процессы в ядерных реакторах (см., например, [**44**]).

Основные математические задачи теории управления относятся к трем большим проблемам. Это проблемы управляемости, наблюдаемости и оптимальности.

Каждая из этих проблем для СРП более многообразна, чем аналогичная проблема для систем с сосредоточенными параметрами (ССП). Это многообразие задач прежде всего определяется различными типами уравнений, описывающих процесс (уравнения параболического, гиперболического или эллиптического типа). Например, гиперболическое

[1]Попов Е. П. Теория автоматического регулирования. — М.: ГИТТЛ, 1956.

уравнение описывает распространение волн возмущения с конечной скоростью. Параболические уравнения описывают процессы со своими особенностями. То же самое можно сказать и об уравнениях эллиптического типа.

Множество допустимых управлений в СРП также имеет свои особенности. Например, колебаниями струны конечной длины можно управлять различными способами. Приведем некоторые из них. Вынужденные колебания струны опишем уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t^2}\,(t,\,x) - a^2 \frac{\partial u}{\partial x^2}\,(t,\,x) = f(t,\,x), \qquad t > 0, \quad 0 < x < \ell.$$

Рассматривая внешнее возмущение $f = f(t,\,x)$ как управляющую функцию, представляется естественным использовать один из следующих способов управления:

1) $f(t,\,x) = g(x)\,p(t)$; g — заданная функция, p — управление;

2) $f(t,\,x) = g(x)\,p(t)$; p — заданная функция, g — управление;

3) $f(t,\,x) = p(x - ct)$ — подвижное управление.

Управлять колебаниями струны можно также, воздействуя на концы струны. Граничные условия к волновому уравнению разнообразны, и поэтому имеются различные способы управления колебаниями, использующие эти условия. Один из них определяется граничными условиями вида $u(t,\,0) = p(t)$, $\dfrac{\partial u(t,\,\ell)}{\partial x} = r(t)$, где $p = p(t)$ и $r = r(t)$ — управляющие функции.

При каждом из перечисленных способов управления можно сформулировать различные естественные задачи и цели управления колебаниями. Можно гасить колебания, генерировать колебания определенной частоты и т. д. Аналогичные примеры можно привести и для процессов, описываемых уравнениями параболического (см., например, [**19**], [**58**], [**66**], [**69**], [**148**]) и эллиптического типов (см., например, [**4**], [**62**], [**171**], [**182**], [**192**], [**212**], [**219**], [**277**], [**280**]). Исследования таких процессов обычно выполняются с помощью аппарата уравнений математической физики (см., например, [**61**], [**167**], [**174**], [**198**], [**199**], [**210**], [**279**], [**286**]). Весьма плодотворными оказались также идеи функционального анализа в решении разнообразных задач управления системами с распределенными параметрами (см., например, [**20**], [**103**], [**176**]). Не вызывает сомнений тот факт, что точные аналитическое решения различных задач удается получить лишь в исключительных случаях. Поэтому в теории управления СРП значительную роль играют различные приближенные методы (см., например, [**29**], [**33**], [**35**], [**46**], [**206**], [**207**], [**208**], [**237**], [**248**], [**310**], [**312**], [**331**]).

В книге изложены основные проблемы теории управления системами с распределенными параметрами для параболических и гиперболических систем (управляемость, наблюдаемость и оптимальность). При решении задач оптимального управления использованы принцип максимума, динамическое программирование и метод моментов. Математические соотношения, определяющие каждый из этих методов, существенно отличаются от своих аналогов, используемых при анализе конечномерных систем.

В частности, показано, что принцип максимума Понтрягина может «вырождаться», если управляемый процесс описывается бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений — это пример И.В. Гирсанова (см. введение в [**66**]). Динамическое программирование при анализе подобной задачи также оказывается неэффективным, если его применять в той форме, в которой это делается при анализе конечномерных систем.

Как известно, уравнения с частными производными и соответствующие краевые задачи удается решить в замкнутой аналитической форме лишь в исключительных случаях. Наиболее распространенная постановка математических задач управления системами с распределенными параметрами состоит в том, что процесс описывается уравнениям с частными производными с дополнительными (начальными и граничными) условиями. В простейших случаях с помощью рядов Фурье или каким-либо иным методом управляемый процесс удается описать бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений [**66**], [**69**]. Обычный прием приближенного решения задачи в этом случае состоит в том, что бесконечная система заменяется конечномерной системой. Ищется приближенное решение для этой конечномерной задачи [**29**]. Однако вопрос о существовании решения поставленной задачи для бесконечномерной системы зачастую даже не рассматривается [**150**]. Это относится как к задачам управляемости, так и к задачам наблюдаемости и оптимальности.

В предлагаемой вниманию читателей книге дается детальный анализ этого круга вопросов для процессов, которые описываются краевыми задачами для параболических и гиперболических уравнений. В ней анализируются основные задачи теории оптимального управления для линейных параболических систем (теплопроводность и диффузия) с доказательствами существования их решения. Сопоставляются различные методы их решения (принцип максимума, динамическое программирование и метод моментов).

Задачи управляемости и наблюдаемости рассмотрены для объектов, поведение которых можно описать волновым уравнением с различными граничными условиями. Рассмотрены также аналогичные задачи для систем с ограниченным возбуждением ([**151**]). Такая система состоит из взаимодействующих объектов с сосредоточенными и распределенными параметрами. Поведение указанной системы описывается взаимосвязанными уравнениями в обыкновенных и частных производных. В работе рассмотрены различные системы, в которых такая связь осуществляется через граничные условия.

Анализируются также методы приближенного решения. Основной результат здесь можно сформулировать следующим образом. Если задача оптимального управления имеет решение, то далеко не всегда «естественная» конечномерная аппроксимация задачи может служить естественным приближением исходной задачи. Иначе говоря, решения конечномерных задач могут не быть достаточно точными приближенными решениям исходной задачи. С увеличением размерности конечномерной задачи последовательность получаемых решений может быть расходящейся. Более того, даже процедура построения сходящихся решений может быть неустойчивой относительно погрешностей вычислений. В работе доказываются соответствующие теоремы.

Задачи управляемости и наблюдаемости рассматриваются для колебательных процессов. Главная их особенность состоит в том, что рассматривается динамика взаимосвязанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами. Доказываются теоремы существования решений задач управляемости и наблюдаемости, из которых следуют практически реализуемые процедуры решения конкретных задач. Основной результат здесь можно сформулировать следующим образом. Управляемость и наблюдаемость рассмотренных связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами не могут быть достигнуты за произвольный заранее заданный отрезок времени. Эти отрезки времени тесно связаны со скоростью распространения волны в объекте с распределенными параметрами.

Другая особенность получаемых здесь результатов состоит в том, что решение каждой из рассмотренных задач не формулируется в терминах, подобных тем, которые получаются при решении аналогичных задач для конечномерных систем. В частности, для конечномерной системы, определяемой векторным уравнением:

$$\dot{y} = Ay + Bu, \qquad y = \{y_1, \ldots, y_n\}, \quad u = \{u_1, \ldots, u_r\},$$

A и B — постоянные матрицы, необходимые и достаточные условия управляемости определяются рангом матрицы $W = \{B, AB, \ldots, A^{m-1}B\}$, где m — степень минимального многочлена матрицы A. Для бесконечномерной системы подобный результат не получен. Вместо этого доказаны достаточные условия существования решения задачи управляемости и для каждого конкретного случая получено управление, решающее поставленную задачу.

В первой главе книги вводятся основные определения, рассматриваются простейшие задачи управления системами с распределенными параметрами, а также характеризуются некоторые особенности задач управления системами с распределенными параметрами. В частности, показано на примере, что необходимые условия оптимальности в принципе максимума Понтрягина могут вырождаться в системах с распределенными параметрами. Аналогичные проблемы возникают при использовании динамического программирования.

Во второй главе рассматривается сначала задача управления системой, поведение которой описывается следующими уравнениями:

$$z_{ixy} = f_i(x,\, y,\, z,\, z_x,\, z_y,\, u), \qquad 0 \leqslant x \leqslant X, \quad 0 \leqslant y \leqslant Y,$$

с дополнительными условиями:

$$\begin{cases} z_i(x,\, 0) = \varphi_i^1(x), & 0 \leqslant x \leqslant X; \\ z_i(0,\, y) = \varphi_i^2(y), & 0 \leqslant y \leqslant Y, \end{cases} \quad i = 1,\, \ldots,\, n,$$

здесь $z = \{z_1,\, \ldots,\, z_n\}$, $u = \{u_1,\, \ldots,\, u_r\}$. Допустимыми управлениями считаются функции $u = u(x, y)$, причем на их зависимость от x и y могут быть наложены дополнительные ограничения типа $u = u(x^2 + y^2)$ или $u = u(x - y)$. Критерием оптимальности является функционал

$$S = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i(X, Y), \qquad c_i = \text{const}.$$

Необходимые условия оптимальности в этой задаче получаются в форме интегрального неравенства:

$$\int\limits_0^X \int\limits_0^Y \bigl[H(x,\, y,\, \psi,\, z,\, z_x,\, z_y,\, u + \Delta u) - \\ - H(x,\, y,\, \psi,\, z,\, z_x,\, z_y,\, u)\bigr]\, dx\, dy \leqslant 0,$$

здесь $H = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i\bigl(x,\, y,\, z(x,y),\, z_x(x,y),\, z_y(x,y),\, u(x,y)\bigr)$. Такая форма необходимых условий оптимальности позволяет учитывать возможную специальную зависимость допустимых управлений от переменных x и y.

Затем рассмотрено обобщение этой задачи, когда граничные условия берутся в виде

$$\begin{cases} z_{ix}(x,\, 0) = f_i^1(x,\, z(x,\, 0),\, v), & 0 \leqslant x \leqslant X, \\ z_{iy}(0,\, y) = f_i^2(y,\, z(0,\, y),\, w), & 0 \leqslant y \leqslant Y, \\ z_i(0,0) = 0, \qquad i = 1,\, \ldots,\, n, \end{cases} \tag{0.1}$$

здесь $v = \{v_1, \ldots, v_s\}$, $w = \{w_1, \ldots, w_t\}$ и допустимыми управлениями являются следующие векторные функции: $\omega = \omega(x,y) = \{u(x,y),\, v(x),\, w(y)\}$. Теперь к прежнему интегральному критерию оптимальности добавляются еще два интегральных неравенства:

$$\int\limits_0^X \big[h^1\big(x, \phi(x), z(x,0), z_x(x,0), z_y(x,0), v(x) + \Delta v(x)\big) - \\ - h^1\big(x, \phi(x), z(x,0), z_x(x,0), z_y(x,0), v(x)\big)\big]\, dx \leqslant 0;$$

$$\int\limits_0^Y \big[h^2\big(y, \chi(y), z(0,y), z_x(0,y), z_y(0,y), w(y) + \Delta w(y)\big) - \\ - h^2\big(y, \chi(y), z(0,y), z_x(0,y), z_y(0,y), w(y)\big)\big]\, dy \leqslant 0.$$

Метод доказательства принципа максимума для рассмотренных здесь задач опирается на работы Л.И. Розоноэра (см., например, [**227**]). Приводятся примеры применения условий оптимальности в каждой из рассмотренных задач.

В третьей главе рассматривается процесс, который описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t}\,(t,\, x) = a^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(t,\, x), \qquad 0 < x < \ell, \quad t > 0,$$

с начальным и граничными условиями для $\alpha = \text{const}$:

$$u(0,\, x) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell,$$

$$\frac{\partial u(t,\, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(t,\, \ell)}{\partial x} + \alpha\big[u(t,\, \ell) - p(t)\big] = 0, \qquad t \geqslant 0.$$

Задача оптимального управления состоит в отыскании такого управления $p \in L_2(0,\, T)$, чтобы соответствующее ему решение $u = u(t,x)$ в заданный момент времени $t = T$ удовлетворяло условию $u(T,x) \equiv 0$ и при этом функционал

$$J[p] = \int\limits_0^1 \big[u(T,\, x) - \varphi(x)\big]^2\, dx + \beta \int\limits_0^T \big[p(t)\big]^2\, dt$$

достигал бы своего наименьшего значения.

В этой задаче необходимые условия оптимальности получены также в форме принципа максимума, с помощью которого оптимальное управление определяется однозначно интегральным уравнением:

$$\beta p(t) + \int\limits_0^T K(t,\, \tau)\, p(\tau)\, d\tau = f(t).$$

Здесь ядро $K(t,\tau)$ положительно и имеет следующий вид: $K(t,\, \tau) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n(t)\, r_n(\tau)$. Приводится анализ приближенных решений этого уравнения.

В четвертой главе рассматривается задача об управлении с минимальной энергией тем же процессом теплопроводности. Требуется найти управление, при котором объект переходит из начального состояния в заданное конечное состояние и при котором функционал

$$J[p] = \int\limits_0^T \big[p(t)\big]^2\, dt$$

достигает своего наименьшего значения.

Задача исследована вариационными методами математической физики. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи. К сожалению, они практически трудно проверяемые. Доказаны теоремы о достаточных условиях существования решения и неразрешимости задачи. Исследованы различные методы приближенного решения задачи, в том числе и метод штрафных функций. Доказано, что не всегда приближенный метод устойчив относительно погрешностей вычислений. Изложенные здесь методы применимы и в более общем случае, когда процесс описывается многомерным уравнением параболического типа с соответствующим граничным условием.

В пятой главе динамическое программирование применяется в решении задач оптимального управления процессом теплопроводности, которые описываются различными краевыми задачами. Главная особенность предлагаемых решений этих задач состоит в том, что при описании процесса следует использовать не классические, а обобщенные решения. При решении линейно-квадратичных задач оптимальное управление определяется краевой задачей, которая является обобщением известного уравнения Риккати.

Две следующие главы посвящены проблемам управляемости и наблюдаемости.

В шестой главе эти проблемы рассматриваются для волновых уравнений с различными граничными условиями, содержащими управляющие функции или функции наблюдения. Сначала рассматривается изолированный объект, а затем исследуются системы последовательно соединенных объектов. И в том, и в другом случае сформулированы и доказаны достаточные условия разрешимости задач управляемости и наблюдаемости. При этом использован в некотором смысле универсальный подход, который можно применить к решению других более сложных задач.

Седьмая глава посвящена анализу проблем наблюдаемости и управляемости взаимосвязанных систем с распределенными и сосредоточенными параметрами. В этих случаях процесс описывается совокупностью уравнений с частными и обыкновенными производными, которые связаны между собой граничными условиями для уравнений с частными производными. Рассмотрен наиболее простой случай, когда уравнением с частными производными является волновое уравнение. В механике такого типа системы называются системами с ограниченным возбуждением, их исследованию посвящены многие работы (см., например, [**151**], [**225**]).

В теории управления системами с распределенными параметрами задачи такого типа представляют особый интерес, поскольку для каждого объекта управления управляющее устройство, как правило, является объектом с сосредоточенными параметрами. Соответствующие математические задачи принципиально отличаются от традиционных задач уравнений математической физики, и поэтому их исследование представляет особый интерес. В работе получены достаточные условия наблюдаемости и управляемости при различных типах взаимодействия рассматриваемых объектов. Эти условия принципиально отличаются от аналогичных условий для конечномерных систем.

Это различие объясняется тем, что состояние конечномерной системы можно характеризовать точкой в конечномерном пространстве. Состояние объекта с распределенными параметрами определяется набором функций. Функции могут принадлежать различным классам (быть непрерывными, дифференцируемыми и т. д.). Поэтому свойство системы определяется не только структурой уравнений и граничных условий, описывающих процесс, но и функциями, характеризующими состояние этой системы. Поэтому условия наблюдаемости и управляемости определяются свойствами функций начального и конечного состояния системы.

Авторы сочли целесообразным приложить достаточно обширный список литературы. В нем представлены работы, относящиеся к инженерным и техническим проблемам управления системами с распределенными параметрами. Более значительная часть работ посвящена математическим проблемам. Все они имеют самое непосредственное отношение к тем задачам, которые рассмотрены в данной книге и могут служить источником новых идей и методов в исследовании управляемых процессов в системах с распределенными параметрами.

Глава 1

Основные определения и примеры

1. Управление конечномерными системами

Определение 1.1. *Системой* называется совокупность связанных объектов. Эта связь в основном будет определяться дифференциальными уравнениями.

Например, набор материальных точек $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ можно рассматривать как систему, если связь между ними описать системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t,\, x_1,\, \ldots,\, x_n), \qquad i = 1,\, \ldots,\, n. \tag{1.1}$$

Определение 1.2. *Состоянием системы* называется совокупность ее параметров, однозначно определяющих поведение системы при заданном внешнем возмущении.

В случае системы (1.1) такими параметрами могут выступать числа

$$x_i(t_0) = x_i^0, \qquad i = 1,\, \ldots,\, n. \tag{1.2}$$

Из основной теоремы Коши существования и единственности решения следует, что при выполнении ряда условий поведение рассматриваемой системы (1.1)–(1.2) однозначно определяется числами (1.2).

Приведем несколько примеров.

Пример 1.1. Рассмотрим движение материальной точки под действием внешней силы (второй закон Ньютона):

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = F(t). \tag{1.3}$$

Поскольку система (в данном случае она состоит из одного объекта) описывается уравнением второго порядка (1.3), то начальное состояние системы задается выражениями

$$x(t_0) = x^0, \qquad \dot{x}(t_0) = x^1. \tag{1.4}$$

Если материальная точка движется под действием упругой силы, то ее движение вместо уравнения (1.3) описывается уравнением $m\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$.

Можно задать и более сложное движение материальной точки, например $m\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = f(t,\,x,\,\dot{x})$. Это движение описывается уже нелинейным уравнением, но тем не менее поведение системы по-прежнему будет однозначно определяться ее начальным состоянием (1.4).

Определение 1.3. Система, состояние которой характеризуется конечным числом параметров, называется *системой с сосредоточенными параметрами*.

Пример 1.2. Рассмотрим процесс теплопроводности в тонком стержне длиной ℓ:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\,(t,\,x) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(t,\,x), \qquad 0 < x < \ell, \quad t > t_0.$$

Левый конец стержня теплоизолирован, а через правый конец происходит теплообмен с внешней средой. Эти граничные условия задаются соотношениями:

$$\frac{\partial u(t,\,0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(t,\,\ell)}{\partial x} + \alpha u(t,\,\ell) = f(t), \qquad t > 0.$$

Для получения конкретного решения необходимо задать начальное условие:

$$u(t_0,\,x) = \varphi_0(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell. \tag{1.5}$$

Рассматривая стержень как систему, состоящую из бесконечного числа элементов (материальных точек), полученную краевую задачу можно характеризовать как связь между ее элементами. Начальное состояние системы определяется функцией φ_0.

Пример 1.3. Опишем процесс вынужденных колебаний струны длиной ℓ, концы которой закреплены.

Распространение колебаний под действием внешнего воздействия описывается волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + f(t, x), \qquad 0 < x < \ell, \quad t > t_0.$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$u(t, 0) = u(t, \ell) = 0, \qquad t > 0.$$

Начальные условия задаются равенствами:

$$u(t_0, x) = \varphi_0(x), \quad u_t(t_0, x) = \psi_0(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell.$$

Начальное состояние системы определяется двумя функциями φ_0, ψ_0.

Внешние возмущения могут быть заданы самой природой процесса, а могут определяться целенаправленно. Задача теории управления и состоит в изучении поведения системы при целенаправленном воздействии на нее.

Определение 1.4. Система, состояние которой определяется набором функций или бесконечным набором числовых параметров, называется *системой с распределенными параметрами.*

Далее будем рассматривать три больших класса задач, решение (и исследование) которых составляет основное содержание теории управления: наблюдаемость системы, управляемость системы и оптимальное управление системой.

1.1. Наблюдаемость системы. Рассмотрим процесс наблюдения за летящим объектом. Два наблюдателя из разных мест следят за движущимся объектом. Каждый из них видит плоскую картинку. Однако с помощью этих двух плоских картинок можно определить расстояние до объекта. И, более того, наблюдая за ним в течение некоторого периода времени, можно полностью описать движение объекта в пространстве.

Задача наблюдаемости состоит в определении состояния системы в каждый конкретный момент времени по некоторой информации о системе, которая получается в течение периода наблюдения.

1.2. Управляемость системы. Пусть система описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь $u_1, \ldots, u_r$ — набор параметров, которые принимают значения из некоторого множества G (где G — область или ее замыкание) в пространстве $\mathbb{R}^r$. Каждая из функций u_i обладает конкретными свойствами.

Задача управляемости системой состоит в том, чтобы найти условия, которым должны удовлетворять функции u_i, $i = 1, \ldots, r$, и f_j, $j = 1, \ldots, n$, чтобы систему из одного заданного состояния можно было перевести в другое заданное состояние.

Пример 1.4. Рассмотрим процесс управления колебаниями математического маятника под действием внешней силы. При этом внешняя сила $u = u(t)$ может действовать: а) ортогонально линии подвеса груза (см. рис. 1.1.1 a)); б) вдоль линии подвеса (см. рис. 1.1.1 b)).

В случае а) система является управляемой. Маятник можно перевести из любого заданного состояния в любое также заданное состояние. В случае б) маятник уже нельзя перевести из положения устойчивого равновесия, изображенного на рис. 1.1.1 c), в любое другое состояние. Однако, из любого другого состояния маятник можно перевести в другое заданное состояние, но не в состояние устойчивого равновесия. Таким образом, случай б) дает пример не полностью управляемой системы.

Задачу управляемости процессом теплопроводности (пример 1.2) сформулируем следующим образом: *можно ли, воздействуя тепловым полем на правый конец стержня, перевести систему из состояния φ_0 состояние φ_1?*

Задача управляемости процессом колебания струны (пример 1.3): *при каком воздействии на концы струны можно перевести систему из состояния (φ_0, ψ_0) в состояние (φ_1, ψ_1)?*

1.3. Оптимальное управление. Принцип максимума Понтрягина. Задачи об оптимальном управлении системами более разнообразны. Основное их содержание

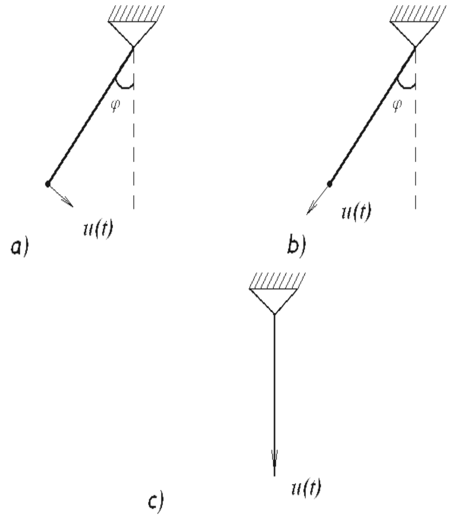

Рис. 1.1.1

состоит в том, чтобы добиться такого поведения системы, при котором оно было наилучшим по некоторому критерию. Одной из первых задач, которая рассматривалась в теории оптимального управления, является задача об оптимальном быстродействии. Она состоит в том, чтобы перевести систему из одного заданного состояния в другое, также заданное состояние за кратчайшее время при ограниченных ресурсах управления.

В теории оптимального управления конечномерными системами разработаны разнообразные методы исследования различных задач. Наиболее распространенными из них являются принцип максимума Понтрягина, принцип оптимальности Беллмана и метод моментов Красовского.

Изложим кратко принцип максимума Понтрягина, когда процесс описывается системой уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r), \qquad i = 1, \ldots n, \tag{1.6}$$

с начальными условиями

$$x_i(t_0) = x_i^0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.7}$$

Управления $u = \{u_1(t), \ldots, u_r(t)\}$ принимают значения в области или в ее замыкании $G \subset \mathbb{R}^r$. Допустимым будет считаться управление $u = u(t)$, у которого каждая компонента $u_i = u_i(t)$ имеет не более чем счетное число точек разрыва (все они первого рода).

Функции f_i для $i = 1, \ldots, n$ таковы, что в рассматриваемой системе (1.6)–(1.7) каждое конкретное управление $u = \{u_1(t), \ldots, \ldots, u_r(t)\}$ определяет такое единственное решение $x = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, что каждая функция $x_j = x_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, почти всюду дифференцируема и непрерывна в точках разрыва функций $u_i = u_i(t)$, $i = 1, \ldots, r$.

Критерием оптимальности служит функционал

$$J[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r)\, dt. \qquad (1.8)$$

Систему надо перевести из состояния (1.7) в состояние

$$x_i(t_1) = x_i^1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Момент времени t_1, вообще говоря, не задан.

Для решения задачи вводится функция

$$H(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, x_0, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i \cdot f_i,$$

где компонента x_0 определяется соотношениями:

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r), \quad x_0(t_0) = 0. \qquad (1.9)$$

Функции $\psi_i = \psi_i(t)$ определяются уравнениями:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \qquad (1.10)$$

Если ввести такие обозначения: $x = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$ и $\psi = \{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n\}$, то рассматриваемая система (1.6)–(1.7), (1.9)–(1.10) в векторной форме примет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial \psi}, \qquad \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H\psi, x, u)}{\partial x}, \qquad (1.11)$$

$$x(t_0) = x^0, \qquad x^0 = (0, x_1^0, \ldots, x_n^0). \qquad (1.12)$$

При введенных обозначениях критерий оптимальности (1.8) можно записать следующим образом: $J[u] = x_0(t_1)$.

Теорема 1.1. (Принцип максимума Понтрягина). *Для того чтобы управление* $u^0(t) = \{u_1^0(t), \ldots, u_r^0(t)\}$ *и соответствующее ему* $x^0(t) = \{x_0^0(t), \ldots, x_n^0(t)\}$ *решение системы были оптимальными, необходимо существование такого ненулевого вектора* $\psi^0(t) = \{\psi_0^0(t), \ldots, \psi_n^0(t)\}$, *что*:

1) *совокупность векторов* u^0, x^0, ψ^0 *определяет решение системы* (1.11) *с начальными условиями* (1.12);

2) $H\big(\psi^0(t), x^0(t), u\big)$, *как функция параметра* u, *достигает своего максимума при* $u = u^0(t)$ *для почти всех точек* t $\big($*в точках непрерывности* $u = u^0(t)\,\big)$:

$$M(t) \triangleq H\big(\psi^0(t), x^0(t), u^0(t)\big) = \max_{u \in G} H\big(\psi^0(t), x^0(t), u\big);$$

3) $\psi_0^0(t_1) \leqslant 0$, $M(t_1) = 0$.

Принцип максимума Понтрягина выделяет, вообще говоря, изолированные управления, среди которых находятся оптимальные (если они существуют).

1.4. Динамическое программирование. Будем рассматривать управляемый процесс, который описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u) \tag{1.13}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x^0, \tag{1.14}$$

где x и f — n-мерные векторы, x^0 — заданный постоянный вектор, а $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$ — r-мерный управляющий вектор, который может принимать значения из некоторой области или ее замыкания U в пространстве переменных $u_1, \ldots, u_r$, определяемой видом наложенных ограничений. В качестве допустимых управлений будем брать измеримые функции $u = u(t)$, $t_0 < t < T$, которые почти при всех t удовлетворяют условию $u(t) \in U$.

Предположим далее, что каждое допустимое управление $u = u(t)$ однозначно определяет решение $x = x(t)$ задачи Коши (1.13)–(1.14), которое является абсолютно непрерывной функцией. На допустимых управлениях $u = u(t)$ и соответствующих им решениях $x = x(t)$ определим функционал $I = \int\limits_{t_0}^{T} G(x,\, u,\, t)\, dt$, где T — фиксированное число, превосходящее t_0.

Рассматриваемая задача оптимального управления заключается в том, чтобы *найти такое управление $u = u^0(t)$ и соответствующее ему решение $x = x^0(t)$, которые доставляли бы функционалу I наименьшее возможное значение.*

В основе динамического программирования лежит принцип оптимальности Р. Беллмана, который в применении к данной задаче можно сформулировать следующим образом.

Предположим, что $u = u^0(t)$ — оптимальное управление, а $x = x^0(t)$ — соответствующее ему решение задачи (1.13)–(1.14). *Пусть, далее, t_1 — произвольная точка интервала (t_0, T), а $u^0(t_1)$ и $x^0(t_1)$ — значения $u = u^0(t)$ и $x = x^0(t)$ при $t = t_1$. Оптимальные траектория $x = x^0(t)$ и управление $u = u^0(t)$ для $t_0 < t < T$ обладают тем свойством, что при произвольном $t_1 \in (t_0, T)$ они минимизируют функционал $I_1 = \int\limits_{t_1}^{T} G(x,\, u,\, t)\, dt$ при условии $\dfrac{dx}{dt} = f\bigl(t,\, x,\, u(t)\bigr)$, $x(t_1) = x^0(t_1)$. Поэтому остаток оптимальной траектории $x = x^0(t)$, $t_1 < t < T$ и остаток оптимального управления $u = u^0(t)$, $t_1 < t < T$ являются оптимальными по функционалу I_1 независимо от того, каким способом система переведена в состояние $x^0(t_1)$.*

Если обозначить $S\bigl(x(t),\, t\bigr) = \max\limits_{u \in U} \int\limits_{t}^{T} G(x(\tau),\, u,\, \tau)\, d\tau$, то с помощью принципа оптимальности Р. Беллмана можно доказать, что функция $S = S(x,\, t)$ удовлетворяет уравнению Беллмана

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{u} \bigl\{ G(x,\, u,\, t) + (\operatorname{grad} S,\, f) \bigr\}.$$

Это уравнение используется для построения оптимального управления $u = u^0(t)$ и решения $x = x^0(t)$, $t_0 < t < T$, соответствующего ему.

В. Г. Болтянский [**18**] показал, что и принцип максимума Понтрягина, и принцип оптимальности Беллмана дают одни и те же необходимые условия оптимальности, но в разных терминах.

Практическое использование принципа максимума и динамического программирования (принцип оптимальности Беллмана) показало, что вычислительные трудности при решении конкретных задач возрастают лавинообразно с ростом размерности управляемой системы. Для систем размерности n при решении задачи с помощью принципа максимума Понтрягина необходимо осуществить n^2 операций. Это явление получило название «проклятие размерности». Естественно возник вопрос: каким же образом решать подобные задачи оптимального управления для бесконечномерных систем?

2. Об особенностях задач управления бесконечномерными системами

2.1. Метод Фурье. Обратимся к задаче управления тепловым процессом в стержне, описанном в примере 1.2. Процесс описывается краевой задачей:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\, x) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\, x), \qquad 0 < x < \ell, \quad t > t_0.$$

$$\frac{\partial u(t,\, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(t,\, \ell)}{\partial x} + \alpha\, u(t,\, \ell) = f(t), \quad t > 0.$$

$$u(t_0,\, x) = \varphi_0(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell. \tag{2.1}$$

Согласно методу разделения переменных (метод Фурье), решение будем искать в виде $u(t, x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x)$.

Функции X_i, $i = 1,\, 2,\, \ldots$, являются решениями следующей задачи Штурма–Лиувилля: найти значения параметра $\lambda = \lambda_i$ (собственные значения) и соответствующие им нетривиальные решения $X_i = X_i(x)$ (собственные функции) краевой задачи

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(\ell) + \alpha X(\ell) = 0.$$

Собственные значения являются положительными корня-

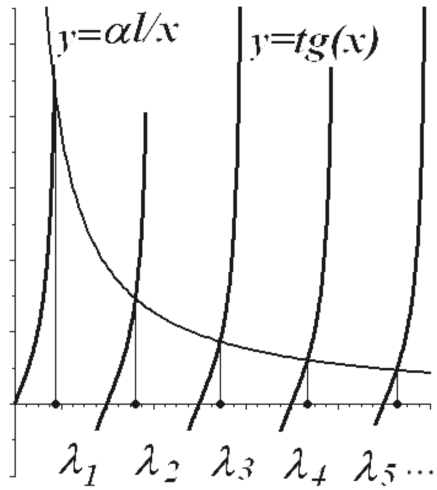

Рис. 1.2.1

ми уравнения[1] $\lambda\,\mathrm{tg}(\lambda\ell) = \alpha$. Геометрически их можно определить как абсциссы точек пересечения линий $y = \mathrm{tg}(x)$ и $y = \alpha\ell/x$, изображенных на рис. 1.2.1.

При этом собственные функции X_i, $i = 1, 2, \ldots$, можно выбрать таким образом, чтобы они образовывали ортонормированный базис в пространстве $L_2[0, \ell]$. Функцию φ_0, определяющую начальное состояние (2.1) системы, также представим в виде ряда: $\varphi_0(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n^0 X_n(x)$. Для определения функций $u_n = u_n(t)$ получаем бесконечномерную систему при $n = 1, 2, \ldots$:

$$\dot{u}_n(t) + a^2\lambda_n^2 u_n(t) = a^2\alpha f(t) X_n(\ell), \quad u_n(t_0) = \varphi_n^0.$$

[1] Подробности см. в § 2 главы 3.

Полученный результат показывает, что если решение уравнения теплопроводности представлять в виде ряда по собственным функциям, то краевую задачу для уравнения с частными производными можно свести к задаче Коши для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Тем самым одна задача управления заменяется другой задачей с принципиально иным способом математического описания. Начальное состояние объекта определяется бесконечномерным вектором $\varphi^0 = \{\varphi_n^0\}$.

Аналогичная ситуация возникает и при анализе колебания струны (пример 1.3).

2.2. О применении принципа максимума Понтрягина к бесконечномерным системам. Просто применить принцип максимума Понтрягина к бесконечномерным системам, вообще говоря, нельзя, так как он может вырождаться для некоторых систем. Дадим пример, принадлежащий И. В. Гирсанову, иллюстрирующий это утверждение.

Пример 2.1. Пусть управляемый процесс описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = u, \tag{2.2}$$

x — вектор с компонентами $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, обладающих следующим свойством: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$. Аналогичным свойством обладают компоненты вектора u: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2 < \infty$.

Допустимыми управлениями будем считать измеримые функции u, в каждый момент времени принимающие значения из области управления

$$u = \{u_1, \ldots, u_n, \ldots\} : |u_n| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \ n = 1, 2 \ldots \tag{2.3}$$

Задача состоит в том, чтобы найти такое допустимое управление $u^0 = u^0(t)$, чтобы соответствующее ему решение $x^0 = x^0(t)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = u^0(t) \tag{2.4}$$

с начальным условием

$$x(0) = \{0,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, \ldots\} \tag{2.5}$$

удовлетворяло бы условию

$$x(T) = \left\{1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{3},\, \ldots,\, \frac{1}{n},\, \ldots\right\} \tag{2.6}$$

при минимальном положительном T.

Уравнение (2.2) с условием (2.5) можно записать в виде

$$x_n(t) = \int\limits_0^t u_n(\tau)\, d\tau, \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

Отсюда с учетом (2.3) находим, что минимальное время перехода от значения $x_n(0) = 0$ к значению $x_n(T) = \dfrac{1}{n}$ получается при выборе $u_n(t) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$. Минимальное время равно $\dfrac{n}{n+1}$. Эта величина стремится к 1 при $n \to \infty$. Таким образом, время T оптимального быстродействия в рассматриваемой задаче не может быть меньше 1.

С другой стороны, управление

$$u^0 = u^0(t) = \left\{1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{3},\, \ldots,\, \frac{1}{n},\, \ldots\right\} \tag{2.7}$$

является допустимым, при этом соответствующая ему траектория x, определяемая соотношениями (2.4)–(2.5), удовлетворяет условию (2.6) при $T = 1$. Следовательно, управление (2.7) является оптимальным.

Проанализируем теперь принцип максимума для рассматриваемой задачи. Строим функцию $H = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \psi_i(t) u_i$, где функции ψ_i определяются уравнениями $\dfrac{d\psi_i}{dt} = 0$ при $i = 1,\, 2,\, \ldots$ Из этих уравнений находим, что $\psi_i(t) = c_i$. В соответствии с принципом максимума не все постоянные c_i равны нулю.

Если для некоторого номера k выполнено $\psi_k(t) \neq 0$, то из условия максимума функции H по переменной u следует, что k-я компонента u_k^0 оптимального управления u^0 должна иметь следующий вид: $u_k^0(t) = \left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k^2}\right) \operatorname{sign} \psi_k$.

Ни одна из компонент оптимального управления (2.7) не равна этому выражению. Следовательно, оптимальное управление (2.7) не удовлетворяет принципу максимума.

Решим задачу приближенно, используя конечномерную аппроксимацию уравнения (2.2). В качестве m-го приближения этого уравнения возьмем систему

$$\frac{dx_n}{dt} = u_n, \qquad n = 1, \ldots, m. \tag{2.8}$$

В качестве допустимых управлений возьмем такие векторные функции $u^m = u^m(t) = \{u_1(t), \ldots, u_m(t)\}$, компоненты которых — измеримые функции, удовлетворяющие условиям

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \qquad n = 1, \ldots, m. \tag{2.9}$$

В качестве m-го приближения $u^0 = u^0(t)$ берем такое управление $\widetilde{u}^m = \widetilde{u}^m(t)$, что соответствующее ему решение уравнений

$$\frac{dx_n}{dt} = \widetilde{u}_n, \qquad n = 1, \ldots, m, \tag{2.10}$$

с начальными условиями

$$x_n(0) = 0, \qquad n = 1, \ldots, m, \tag{2.11}$$

удовлетворяет условиям

$$x_n(T) = \frac{1}{n}, \qquad n = 1, \ldots, m, \tag{2.12}$$

при наименьшем T.

Управление $\widetilde{u}^m = \widetilde{u}^m(t)$ будем строить следующим образом. Система (2.8) с условиями (2.11) эквивалентна соотношениям:

$$x_n(t) = \int\limits_0^t u_n(t)\, dt, \qquad n = 1, \ldots, m.$$

Отсюда следует, что минимальное время T_n, за которое координата x_n переходит из состояния $x_n = 0$ в состояние $x_n = \dfrac{1}{n}$ при условии $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$, равно $T_n = \dfrac{n}{n+1}$ для управления $u_n(t) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$.

Очевидно, что $T_1 < T_2 < \ldots < T_m$. Поэтому время перехода всей системы (2.8) из состояния (2.11) в состояние (2.12) не может быть меньше T_m. Следовательно, любое управление $u^m(t) = \{u_1, \ldots, u_m\}$, которое переводит систему (2.8) из состояния (2.11) в состояние (2.12) за время T_m, будет оптимальным.

Таким образом, оптимальное управление $\widetilde{u}^m(t)$ будем искать из соотношений:

$$\int\limits_0^{T_m} u_n(t)\,dt = \frac{1}{n}, \qquad n = 1, \ldots, m, \qquad T_m = \frac{m}{m+1}.$$

Из равенства компонента $\widetilde{u}_m = \widetilde{u}_m(t)$ находится однозначно: $\widetilde{u}_m(t) = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m^2}$. Для определения остальных $m-1$ компонент вектора $\widetilde{u}^m$ есть $m-1$ соотношений:

$$\int\limits_0^{T_m} u_n(t)\,dt = \frac{1}{n},\ n = 1, \ldots, m-1, \quad T_m = \frac{m}{m+1}. \tag{2.13}$$

При этом любой вектор $\left\{u_1(t), \ldots, u_{m-1}(t), \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m^2}\right\}$ является оптимальным управлением, если каждая компонента $u_i = u_i(t)$ для $i = 1, \ldots, n-1$ удовлетворяет условиям (2.9) и (2.13). Поэтому управление

$$\widetilde{u}^m = \widetilde{u}^m(t) = \left\{\frac{1}{T_m}, \frac{1}{2T_m}, \ldots, \frac{1}{(m-1)T_m}, \frac{1}{mT_m}\right\}$$

является оптимальным. При этом соответствующее ему решение задачи (2.10)–(2.11) имеет вид

$$\widetilde{x}_n(t) = \frac{t}{nT_m}, \quad n = 1, \ldots, m, \quad \widetilde{x}^m(t) = \{\widetilde{x}_1(t), \ldots, \widetilde{x}_m(t)\}.$$

Проверим, что на найденных векторах $\widetilde{u}^m = \widetilde{u}^m(t)$ и $\widetilde{x}^m = \widetilde{x}^m(t)$ принцип максимума выполняется. Для этого строим функцию $H\big(\psi^m(t), \widetilde{x}^m(t), u\big) = \sum\limits_{n=1}^{m} \psi_n u_n$, где ψ_n определяются из уравнений $\dfrac{d\psi_n}{dt} = 0$, $n = 1, \ldots, m$.

Полагая $\psi_1(t) = \ldots = \psi_{m-1}(t) = 0$, $\psi_m(t) = 1$, находим, что на управлении $\widetilde{u}^m(t)$ функция $H\big(\psi^m(t), \widetilde{x}^m(t), u\big)$ достигает своего максимума.

Более того, эта функция достигает максимума на любом управлении вида $\left\{u_1(t), \ldots, u_{m-1}(t), \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m^2}\right\}$, где u_n для $n = 1, \ldots, m-1$ — любые измеримые функции, удовлетворяющие условиям (2.9) и (2.13).

Таким образом, при каждом фиксированном m функция $H\big(\psi^m(t), \widetilde{x}^m(t), u\big)$ не вырождается, в то время как функция $H\big(\psi^m(t), x^0(t), u\big) = \psi_1 u_1 + \ldots + \psi_n u_n + \ldots$ вырождается.

При решении задач оптимального управления для конечномерных систем обычно решаются две задачи: задача поиска программного оптимального управления (найти управление $u = u(t)$, переводящего точку из одного положения в другое за кратчайшее время) и задача синтеза оптимального управления, когда управление находится как функция состояния системы $u = u(t, x)$ (управление велосипедом — в каждый момент времени его управление зависит от состояния системы).

Для систем с распределенными параметрами на допустимые управления могут накладываться такие ограничения, которые невозможны для конечномерных систем. Например, в уравнении теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$ функция f рассматривается как управляющая функция. Здесь возможны ограничения: 1) f зависит только от t: $f = f(t)$; 2) функция f произвольно зависит от t и x: $f = f(t, x)$; 3) функция f зависит от $x - t$: $f = f(x - t)$. Ясно, что таких специальных ограничений на зависимость допустимых управлений от t и x в различных задачах может быть сколько угодно.

3. Вводные задачи

3.1. Задача о критическом диаметре трубы.

3.1.1. *Случай однослойной трубы.* Пусть дана цилиндрическая труба, имеющая внутренний диаметр $d_1 = 2r_1$ и внешний диаметр $d_2 = 2r_2$ (см. рис. 1.3.1). Внутри трубы установлена постоянная температура θ_1, а вне ее — постоянная температура θ_2. В стенках трубы устанавливается стационарное температурное поле. Если предположить, что труба достаточно длинная по сравнению с толщиной ее стенок, то внутри стенок трубы температурное поле не зависит от температуры на ее торцах.

Предполагается, что теплообмен внутри стенок трубы описывается законом Фурье. Чтобы его сформулировать, введем следующие обозначения: $u(t, x)$ — температура в точке x некоторой области G в момент времени t. Вектор $\mathbf{j}(t, x)$ — плотность теплового потока в единицу времени. Он определяет количество тепла, которое проходит через единичную площадь изотермической поверхности в окрестности точки x за единицу времени.

Закон Фурье можно записать следующим образом:

$$j(t, x) = -k \operatorname{grad} u(t, x).$$

Коэффициент k называется *коэффициентом теплопроводности.*

Теплообмен с внешней средой через границу S области G определяется по *закону Ньютона*

$$q(t, x) = \alpha(u - \theta),$$

где $q(t, x)$ — количество тепла, проходящего в единицу времени через единичную площадку поверхности, примыкающей к границе S; u — температура среды внутри G вблизи границы, θ — температура внешней среды вблизи S, а α — *коэффициент теплообмена.*

Если $u(r)$ — температура внутри стенок трубы, для r справедливо $r_1 < r < r_2$, то температурное поле в стенках трубы описывается стационарным уравнением теплопроводности, которое в цилиндрических координатах принимает следующий вид:

$$\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{du}{dr}\right) = 0. \tag{3.1}$$

На внутренней ($r = r_1$) и на внешней ($r = r_2$) стенках трубы выполнены краевые условия:

$$\begin{aligned} k\,\frac{du}{dr} &= \alpha_1(u - \theta_1), \qquad r = r_1, \\ -k\,\frac{du}{dr} &= \alpha_2(u - \theta_2), \qquad r = r_2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь α_1 и α_2 — коэффициенты теплообмена внутренней и внешней стенки трубы соответственно, а k — коэффициент теплопроводности трубы.

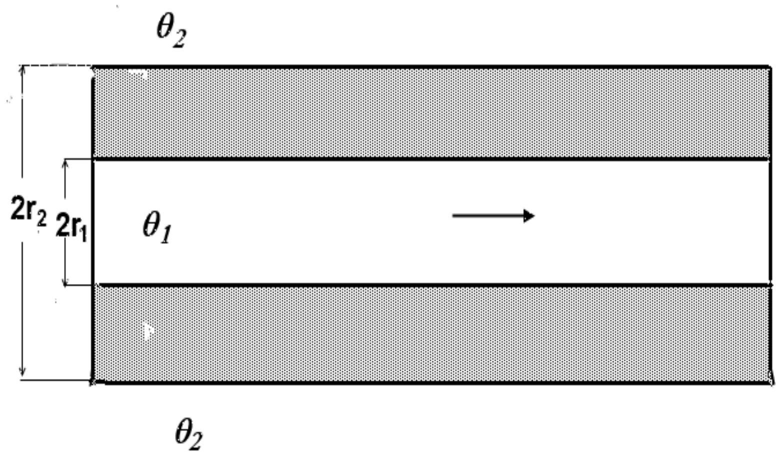

Рис. 1.3.1

Таким образом, температурное поле внутри стенок трубы описывается уравнениями (3.1)–(3.2).

Задача 3.1. *При заданных температурных полях внутри и вне трубы определить ее внешний диаметр, при котором линейная плотность теплового потока от среды θ_1 к среде θ_2 будет максимальной.*

Заметим, что линейная плотность теплового потока q_ℓ вычисляется по формуле

$$q_\ell = \frac{Q}{\ell}, \tag{3.3}$$

где Q — количество тепла, проходящего через стенки трубы длиной ℓ в единицу времени.

Найдем решение краевой задачи (3.1)–(3.2):

$$u(r) = C_1 \ln r + C_2, \qquad r_1 \leqslant r \leqslant r_2. \tag{3.4}$$

Постоянные C_1 и C_2 определим из (3.4) при $r = r_1$ и $r = r_2$:

$$u(r_1) = C_1 \ln r_1 + C_2, \qquad u(r_2) = C_1 \ln r_2 + C_2.$$

Тогда

$$C_1 = \frac{u(r_1) - u(r_2)}{\ln \dfrac{d_1}{d_2}}, \qquad C_2 = u(r_1) - \frac{u(r_1) - u(r_2)}{\ln \dfrac{d_1}{d_2}} \ln r_1.$$

Следовательно,

$$u(r) = u(r_1) - \big[u(r_1) - u(r_2)\big] \frac{\ln \dfrac{d}{d_1}}{\ln \dfrac{d_2}{d_1}}, \qquad d = 2r. \tag{3.5}$$

Определим тепловой поток через элемент площади цилиндрической поверхности, используя закон Фурье и полученное выражение (3.5):

$$Q = -k \frac{du}{dr} 2\pi r \ell = \frac{2\pi \ell k}{\ln \dfrac{d_2}{d_1}} \big[u(r_1) - u(r_2)\big].$$

Таким образом, из (3.3) находим

$$q_\ell = \frac{2\pi k}{\ln \dfrac{d_2}{d_1}} \big[u(r_1) - u(r_2)\big]. \tag{3.6}$$

Выражение $\big[u(r_1) - u(r_2)\big]$ найдем из краевых условий (3.2) и выражения (3.5) для $u = u(r)$:

$$u(r_1) - \theta_1 = -\frac{k}{\alpha_1} \frac{u(r_1) - u(r_2)}{\ln \dfrac{d_2}{d_1}} \frac{1}{r_1};$$

$$-\big[u(r_2) - \theta_2\big] = -\frac{k}{\alpha_2} \frac{u(r_1) - u(r_2)}{\ln \dfrac{d_2}{d_1}} \frac{1}{r_2}.$$

Откуда находим

$$u(r_1) - u(r_2) = (\theta_1 - \theta_2) \left[1 + \frac{k}{\ln \dfrac{d_2}{d_1}} \left(\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \frac{1}{\alpha_2 r_2} \right) \right]^{-1}.$$

Теперь подставим найденное выражение в формулу (3.6):

$$q_\ell = \frac{\pi(\theta_1 - \theta_2)}{\dfrac{1}{2k} \ln \dfrac{d_2}{d_1} + \dfrac{1}{\alpha_1 d_1} + \dfrac{1}{\alpha_2 d_2}}.$$

Величина

$$R_\ell\,(d_2) = \frac{1}{2k} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \tag{3.7}$$

называется *линейным термическим сопротивлением*, а обратная ей величина $1/R_\ell$ — *линейной термической проводимостью.*

Функция (3.7) позволяет решить экстремальную задачу 3.1. Так как θ_1 и θ_2 фиксированы и $\theta_1 > \theta_2$, то линейная плотность теплового потока q_ℓ достигает своего максимального значения при том значении диаметра d_2, при котором достигает своего минимального значения функция (3.7). Функция $R_\ell\,(d_2)$ достигает своего минимального значения при

$$d_2 = \frac{2k}{\alpha_2}. \tag{3.8}$$

Поставленная экстремальная задача 3.1 имеет единственное решение, и это решение задается формулой (3.8).

Полученный результат находит широкое применение в вопросах конструирования теплообменных аппаратов, поскольку оптимальный выбор труб в этих аппаратах позволяет повысить их эффективность.

3.1.2. *Случай многослойной трубы.* Представляет интерес решение экстремальной задачи, аналогичной задаче 3.1, для многослойной и, в частности, двухслойной стенки.

Пусть труба имеет n слоев. Закон распределения температуры в каждом слое с номером i определяется по формуле, аналогичной формуле (3.5):

$$u(r) = u(r_i) - \bigl[u(r_i) - u(r_{i+1})\bigr] \frac{\ln \dfrac{d}{d_i}}{\ln \dfrac{d_{i+1}}{d_i}}, \qquad d = 2r,$$

здесь $r_i < r < r_{i+1}$. Согласно закону Фурье, линейная плотность q_ℓ^i теплового потока равна

$$q_\ell^i = \frac{2\pi k_i}{\ln \dfrac{d_{i+1}}{d_i}} \bigl[u(r_i) - u(r_{i+1})\bigr].$$

Так как в стенке трубы отсутствуют тепловые источники и стоки, то $q_\ell^1 = q_\ell^2 = \ldots = q_\ell^n = q_\ell$, следовательно, можно записать

$$\frac{q_\ell}{2k_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} = \pi\bigl[u(r_i) - u(r_{i+1})\bigr], \qquad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n. \tag{3.9}$$

Условия теплообмена с внешней средой определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} k_1 \left(\frac{du}{dr}\right)_{r=r_1} &= \alpha_1\bigl[u(r_1) - \theta_1\bigr], \\ k_n \left(\frac{du}{dr}\right)_{r=r_{n+1}} &= -\alpha_2\bigl[u(r_{n+1}) - \theta_2\bigr]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Выражения, стоящие слева в равенствах (3.10), можно выразить через q_ℓ, используя закон Фурье:

$$\begin{aligned} q_\ell &= \frac{Q_1}{\ell} = -k_1 \left(\frac{du}{dr}\right)_{r=r_1} 2\pi r_1, \\ q_\ell &= \frac{Q_{n+1}}{\ell} = -k_n \left(\frac{du}{dr}\right)_{r=r_{n+1}} 2\pi r_{n+1}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

здесь Q_i — количество тепла, протекающего в единицу времени через боковую поверхность цилиндра радиусом r_i и высотой ℓ. Поэтому из (3.10) и (3.11) следует, что

$$\frac{q_\ell}{\alpha_1 d_1} = \pi\bigl[\theta_1 - u(r_1)\bigr], \qquad \frac{q_\ell}{\alpha_2 d_{n+1}} = \pi\bigl[u(r_{n+1}) - \theta_2\bigr]. \tag{3.12}$$

Суммируя левые и правые части выражений (3.9) и (3.12), находим $q_\ell R_\ell = \pi\big[\theta_1 - \theta_2\big]$, где величина

$$R_\ell = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}\,\ln\frac{d_{n+1}}{d_i}$$

называется *линейным термическим сопротивлением* многослойной цилиндрической стенки.

Если рассматривать задачу о критическом диаметре многослойной стенки, легко установить, что линейная плотность теплового потока будет максимальной при условии $d^0_{n+1} = \dfrac{2k_n}{\alpha_2}$, т. е. если диаметр верхнего слоя будет критическим.

Минимальное линейное термическое сопротивление определяется по формуле

$$R_\ell = \frac{1}{\alpha_1 d^0_1} + \frac{1}{\alpha_2 d^0_{n+1}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}\,\ln\frac{d^0_{n+1}}{d^0_i},$$
$$d^0_i = d_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Покажем, как полученный результат применяется в задаче о выборе тепловой изоляции цилиндрической трубы.

Пример 3.1. Пусть d_1 и d_2 — внутренний и внешний диаметры трубы, k_1 — коэффициент внутренней ее теплопроводности и α_1 — коэффициент теплообмена с внешней средой. Далее, пусть k_2 — коэффициент внутренней теплопроводности материала, который берут в качестве изолятора, α_2 — коэффициент теплообмена изолятора с внешней средой, а d_3 — диаметр двухслойной стенки.

Задача заключается в том, чтобы при данных d_1 и d_2 выбрать оптимальную толщину изолятора с целью минимизации линейной плотности теплового потока.

Возможны следующие случаи.

1. $d_2 < d^0_3$, где d^0_3 — критический диаметр двухслойной стенки. Тогда с возрастанием d_3 от d_2 до d^0_3 линейное термическое сопротивление R_ℓ будет убывать и, следовательно, линейная плотность теплового потока q_ℓ будет возрастать и достигнет своего максимального значения при $d_3 = d^0_3$. При дальнейшем увеличении d_3 линейная плотность теплового потока будет убывать и при некотором $d_3 = d_3^*$ достигнет того значения, которое она принимала при отсутствии изолятора.

Таким образом, слой изоляции, соответствующий значению $d_3 = d_3^*$, является неэффективным (отдача тепла такая же, как при отсутствии изоляции).

2. $d_2 \geqslant d_3^0$. В этом случае линейное термическое сопротивление R_ℓ монотонно возрастает с увеличением d_3 и, следовательно, линейная плотность теплового потока будет монотонно убывать.

3.2. О критическом размере ядерного реактора.

3.2.1. *Реактор в форме шара.* Рассмотрим простейшую задачу оптимизации из теории ядерных реакторов [**44**], когда плотность нейтронов в реакторе подчиняется уравнению

$$\Delta N(M) + \alpha^2 N(M) = 0, \qquad M \in \Omega, \tag{3.13}$$

здесь Δ — оператор Лапласа, а α — лапласиан или материальный коэффициент.

По физическому смыслу функции N, входящей в уравнение (3.13), нас будут интересовать лишь такие его решения, которые удовлетворяют условию

$$N(M) \geqslant 0, \qquad M \in \Omega \tag{3.14}$$

и ограничены.

Пусть Ω — шар радиуса R и на границе его выполняется условие

$$N(M) = 0, \qquad M \in \partial\Omega. \tag{3.15}$$

Задача 3.2. *Какой минимальный радиус R при заданном α должен быть у шара Ω, чтобы внутри него процесс был стационарным?*

Пусть $N = N(r)$, $0 < r \leqslant R$. Уравнение (3.13) в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dN}{dr}\right) + \alpha^2 N = 0. \tag{3.16}$$

Если ввести функцию $u = rN(r)$, то уравнение (3.16) можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \alpha^2 u = 0. \tag{3.17}$$

Для функции $u = u(r)$ выполнены условия:

$$u|_{r=R} = 0, \quad u(r) \geqslant 0, \quad u(r) < \infty.$$

Общее решение уравнения (3.17):

$$u(r) = C_1 \cos \alpha r + C_2 \sin \alpha r.$$

Поскольку $u(0) = 0$, то $C_1 = 0$ и, следовательно, функция N принимает следующий вид: $N = N(r) = C_2 \dfrac{\sin \alpha r}{r}$.

Далее, $N(R) = 0$, поэтому $\sin \alpha R = 0$ и $\alpha R = k\pi$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $N(r) = \dfrac{C_k}{r} \sin \dfrac{k\pi}{R} r$. Поскольку $N(r) \geqslant 0$ для $0 < r \leqslant R$, то требуемое решение получается при $k = 1$, т. е. минимальный радиус R определим следующим образом: $R = \dfrac{\pi}{\alpha}$.

Объем области Ω в этом случае определяется однозначно по формуле

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^3. \tag{3.18}$$

Следовательно, при заданной величине α существует единственный шар (его радиус R равен π/α), в котором краевая задача (3.13), (3.15) имеет положительное ограниченное решение. Это означает, что для шаровой области сформулированная выше экстремальная задача имеет единственное решение и она сводится к краевой задаче (3.13), (3.15).

3.2.2. *Реактор в форме цилиндра.* Предположим теперь, что реактор представляет собой прямой круговой цилиндр радиусом R и высотой 2H. В этом случае процесс также описывается краевой задачей (3.13), (3.15) с теми же ограничениями на плотность нейтронов. Требуется найти R и H, определяющие минимальный объем цилиндра, такие, чтобы эта краевая задача имела ограниченное решение, удовлетворяющее условию (3.14).

Поместим начало координат в центр цилиндра. В силу симметрий граничных условий плотность нейтронов N в цилиндре можно характеризовать функцией $N = N(r, z)$, $0 \leqslant r \leqslant R$, $-H \leqslant z \leqslant H$, уравнение (3.13) можно записать в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial N}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \alpha^2 N = 0. \tag{3.19}$$

Согласно методу разделения переменных, решение этого уравнения ищем в виде

$$N(r, z) = \Phi(r)\Psi(z).$$

Подставляя эту функцию в уравнение (3.19) и разделяя переменные, получим

$$\frac{1}{\Phi r}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{d\Phi}{dr}\right) + \alpha^2 = -\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{dz^2} = \alpha_z^2,$$

где α_z — неопределенная постоянная. Отсюда приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dr}\left(r\,\frac{d\Phi}{dr}\right) + \alpha_r^2 r\Phi = 0, \\ \frac{d^2\Psi}{dz^2} + \alpha_z^2\Psi = 0, \quad \alpha_r^2 + \alpha_z^2 = \alpha^2. \end{gathered} \tag{3.20}$$

Из граничных условий (3.15) получаем

$$\Phi(R) = 0,\ \Psi(-H) = \Psi(H) = 0. \tag{3.21}$$

Общее решение второго уравнения из (3.20) можно представить в виде

$$\Psi(z) = A\cos\alpha_z z + B\sin\alpha_z z,$$

где A и B — произвольные постоянные. Поскольку нас интересуют лишь положительные решения, то $B = 0$ и

$$\alpha_z H = \pi \tag{3.22}$$

и, следовательно,

$$\Psi(z) = A\cos\alpha_z z,\ A > 0.$$

Ограниченным решением первого уравнения из (3.20) является функция

$$\Phi(r) = cJ_0(\alpha_r r),$$

где c — произвольная постоянная, а J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Ее можно представить в виде

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{4n}}.$$

Заметим, что из граничного условия (3.21) следует равенство $J_0(\alpha_r R) = 0$. Так как нас интересуют лишь положительные решения $\Phi(r)$, то

$$\alpha_r = \frac{2.405}{R}. \tag{3.23}$$

Положительное решение уравнения (3.19), удовлетворяющее нулевым граничным условиям можно представить в виде

$$N(r,z) = A \cos\left(\frac{\pi}{H}\,z\right) J_0\left(\frac{2.405}{H}\,r\right), \tag{3.24}$$

где A — произвольная положительная постоянная. Объем цилиндра Ω, согласно формулам (3.22) и (3.23), равен

$$V = 2\pi R^2 H = 2\pi \left(\frac{\pi}{\alpha_z}\right)\left(\frac{2.405}{\alpha_r}\right)^2,$$

где $\alpha_z^2 + \alpha_r^2 = \alpha^2$, или, что то же самое:

$$\left(\frac{2.405}{\alpha_r}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\alpha_z}\right)^2 = \alpha^2. \tag{3.25}$$

Следовательно, при любых R и H, связанных соотношением (3.25), имеем положительное решение в цилиндре

$$\overline{\Omega} = \{0 \leqslant r \leqslant R,\ -H \leqslant z \leqslant H\},$$

и это решение можно представить в виде (3.24).

Для того чтобы определить минимальный объем цилиндра Ω, формулу (3.25) запишем в виде

$$V = \frac{2\pi^2 a^2}{\alpha^3}\left(\frac{\alpha_r^2 + \alpha_z^2}{\alpha_z^2}\right)^{1/2}\left(\frac{\alpha_r^2 + \alpha_z^2}{\alpha_z^2}\right),$$

где $a = 2.405$. Согласно соотношениям (3.22) и (3.23) эту формулу можно переписать следующим образом:

$$V = \frac{2\pi^4 a^2}{\alpha^3} \frac{H}{R} \left[\left(\frac{R}{H} \right)^2 + \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2}. \tag{3.26}$$

Обозначим через V_0 критический объем шарового реактора, вычисленный в предыдущем пункте настоящего параграфа (см. выражение (3.18)) для значения α, использованного в формуле (3.26), и введем обозначения

$$z = \frac{V}{V_0}, \quad x = \frac{R}{H}, \quad b = \frac{a}{\pi}.$$

Тогда формулу (3.26) можно записать в виде

$$z = \frac{3(x^2 + b^2)^3/2}{2x}.$$

Полученная функция достигает своего наименьшего значения при $x = b/\sqrt{2}$.

Следовательно, цилиндрический реактор имеет наименьший объем при

$$2R = \sqrt{2} H b \approx 1.08 H.$$

Величина этого объема равна

$$V \approx 1.45 V_0.$$

Таким образом, в случае цилиндрической области сформулированная задача решается однозначно. Однако ответ получается нетривиальным. Более детальный ее анализ, а также другие задачи оптимизации нейтронного поля рассмотрены в [**44**].

Глава 2

Принцип максимума для систем с распределенными параметрами

1. Оптимальное управление системой гиперболического типа

.

1.1. Постановка задачи. Будем рассматривать систему, описываемую уравнениями:

$$z_{ixy} = f_i\big(x,\, y,\, p(x,\, y),\, u(x,\, y)\big), \qquad i = 1,\, \ldots,\, n, \qquad (1.1)$$

здесь обозначено $p = \big\{z_1,\, \ldots, z_n, z_{1x},\, \ldots,\, z_{nx}, z_{1y},\, \ldots, z_{ny}\big\}$ и $u = \big\{u_1,\, \ldots,\, u_r\big\}$; точка $(x,\, y)$ принадлежит прямоугольнику $\Pi = \{\, (x, y) : \, 0 < x < X,\ 0 < y < Y \,\}$.

Пусть далее выполнены условия для $i = 1,\, \ldots,\, n$

$$\begin{cases} z_i(x,\, 0) = \varphi_i^1(x), & 0 \leqslant x \leqslant X; \\ z_i(0,\, y) = \varphi_i^2(y), & 0 \leqslant y \leqslant Y. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Предположим, что u принимает значения на некотором множестве $G \subset \mathbb{R}^r$, где G — область или ее замыкание (возможно, что к области G присоединены не все ее граничные точки).

Допустимыми управлениями будем считать функции $u = u(x,\, y)$, принимающие значения в G, такие, что при каждом конкретном управлении u задача (1.1)–(1.2) имеет единственное решение:

$$z_i = z_i\big(x,\, y,\, u(x,\, y)\big), \qquad i = 1,\, \ldots,\, n. \qquad (1.3)$$

Предположим также, что $z = \big\{z_1,\, \ldots,\, z_n\big\}$ обладает всеми необходимыми производными.

На множестве полученных решений $z = z(x, y)$ при всех допустимых управлениях определим функционал

$$S = \sum_{i=1}^{n} c_i\, z_i(X,\, Y), \tag{1.4}$$

где c_i — заданные постоянные

Задача 1.1. *Среди всех допустимых управлений найти такое управление, что на соответствующем ему решении* (1.3) *задачи* (1.1)–(1.2) *функционал S вида* (1.4) *достигает минимального значения.*

1.2. Принцип максимума. Введем функцию

$$H(x,\, y,\, \psi,\, p,\, u) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i\, f_i(x,\, y,\, p,\, u), \quad \psi = \{\psi_1,\, \ldots,\, \psi_n\}.$$

Вспомогательные функции $\psi_i = \psi_i(x,\, y)$, $i = 1,\, \ldots,\, n$ определим системой уравнений для $i = 1,\, \ldots,\, n$:

$$\psi_{ixy} = \frac{\partial H}{\partial z_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial z_{ix}}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial H}{\partial z_{iy}}\right), \tag{1.5}$$

с граничными условиями при $i = 1,\, \ldots,\, n$:

$$\begin{aligned} \psi_{iy}(X,\, y) + \frac{\partial H}{\partial z_{ix}}(X,\, y) = 0, \\ \psi_{ix}(x,\, Y) + \frac{\partial H}{\partial z_{iy}}(x,\, Y) = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

и финальными условиями:

$$\psi_i(X,\, Y) = -c_i, \qquad i = 1,\, \ldots,\, n. \tag{1.7}$$

Справедлив следующий принцип максимума.

Теорема 1.1. (Принцип максимума). *Для оптимальности управления $u = u^0(x, y)$ и соответствующего ему решения $z = z^0(x, y)$ задачи* (1.1)–(1.2), *т. е. для того, чтобы они доставляли минимум функционалу S вида* (1.4), *необходимо, а в случае линейности системы* (1.1) *и достаточно, чтобы функция* $H = H\big(x,\, y,\, \psi,\, p,\, u\big)$ *удовлетворяла условию*

$$\iint\limits_{\Pi} \big[H\big(x,\, y,\, \psi^0,\, p^0,\, u^0+\Delta u\big) - H\big(x,\, y,\, \psi^0,\, p^0,\, u^0\big)\big]\, dx\, dy \leqslant 0.$$

Здесь $p^0(x,\, y) = p(x,\, y)\Big|_{z=z^0(x,\, y)}$, *функция* $z = z^0(x,\, y)$ — *решение задачи* (1.1)–(1.2) *при оптимальном управлении* $u = u^0(x, y)$, *а* $\psi = \psi^0(x, y)$ — *решение системы* (1.5)–(1.7) *при оптимальном* $u = u^0(x, y)$.

Доказательство. Равенство

$$\iint\limits_{\Pi} \sum_{i=1}^{n} \psi_i\big(z_{ixy} - f_i(x,\, y,\, p,\, u)\big)\, dx\, dy = 0 \tag{1.8}$$

справедливо для каждого решения z системы (1.1) при произвольных непрерывных функциях $\psi_i = \psi_i(x, y)$.

Пусть Δu — допустимое приращение управления u^0. Это означает, что управление $u^0 + \Delta u$ принимает значения на множестве G и функция Δu такова, что на управлении $u^0 + \Delta u$ краевая задача (1.1)–(1.2) имеет единственное решение, которое обозначим $z^0 + \Delta z$. Соответствующий этому решению вектор p обозначим $p^0 + \Delta p$. Очевидно, что для функции $\Delta z = \big\{\Delta z_1,\, \ldots,\, \Delta z_n\big\}$ справедливы следующие (см. (1.1)–(1.2)) равенства при $i = 1,\, \ldots,\, n$:

$$\Delta z_{ixy} = f_i(x,\, y,\, p^0 + \Delta p,\, u^0 + \Delta u) - f_i(x,\, y,\, p^0,\, u^0) \tag{1.9}$$

и

$$\Delta z_i(x,\, 0) = \Delta z_i(0,\, y) = 0. \tag{1.10}$$

Из равенств (1.8) и (1.9) получаем

$$\iint\limits_{\Pi} \Big[\sum_{i=1}^{n} \psi_i^0\, \Delta z_{ixy} - \sum_{i=1}^{n} \psi_i^0\, f_i\big(x,\, y,\, p^0 + \Delta p,\, u^0 + \Delta u\big) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \psi_i^0\, f_i\big(x,\, y,\, p^0,\, u^0\big)\Big]\, dx\, dy = 0.$$

Используя функцию H, полученное равенство можно записать следующим образом:

$$\iint\limits_{\Pi} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \psi_i^0 \, \Delta z_{ixy} - \Big[H\big(x,\, y,\, \psi^0,\, p^0 + \Delta p,\, u^0 + \Delta u\big) - \\ - H\big(x,\, y,\, \psi^0,\, p^0,\, u^0\big)\Big]\Big\}\, dx\, dy = 0. \quad (1.11)$$

Сумму в (1.11) интегрируем по частям, при этом учтем условия (1.10) и равенство в (1.7), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Pi} \psi_i^0 \, \Delta z_{ixy}\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{n} \Big\{ -c_i \, \Delta z_i(X,\, Y) - \\ - \int\limits_0^X \psi_{ix}^0(x,\, Y)\, \Delta z_i(x,\, Y)\, dx - \int\limits_0^Y \psi_{iy}^0(X,\, y)\, \Delta z_i(X,\, y)\, dy + \\ + \iint\limits_{\Pi} \psi_{ixy}^0 \, \Delta z_i \, dx\, dy \Big\}.$$

Преобразуем интеграл в (1.11), содержащий функцию H:

$$\iint\limits_{\Pi} \big[H(x, y, \psi^0, p^0 + \Delta p, u^0 + \Delta u) - H(x, y, \psi^0, p^0, u^0)\big]\, dx\, dy = \\ = \iint\limits_{\Pi} \Delta_u H(x,\, y,\, \psi^0,\, p^0,\, u^0)\, dx\, dy + \\ + \iint\limits_{\Pi} \Delta_p H(x,\, y,\, \psi^0,\, p^0,\, u^0)\, dx\, dy + R.$$

Здесь введены обозначения

$$\Delta_u H(x, y, \psi^0, p^0, u^0) = \\ = H(x, y, \psi^0, p^0, u^0 + \Delta u) - H(x, y, \psi^0, p^0, u^0),$$

$$\Delta_p H(x, y, \psi^0, p^0, u^0) = \\ = H(x, y, \psi^0, p^0 + \Delta p, u^0) - H(x, y, \psi^0, p^0, u^0),$$

$$R = \iint\limits_{\Pi} \big[\Delta_u H(x, y, \psi^0, p^0 + \Delta p, u^0) - \\ - \Delta_u H(x, y, \psi^0, p^0, u^0)\big]\, dx\, dy.$$

Используя формулу Тейлора, получаем

$$\iint\limits_{\Pi} \Delta_p H(x,\, y,\, \psi^0, p^0,\, u^0)\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Pi} \left[\frac{\partial H}{\partial z_i}\,\Delta z_i + \frac{\partial H}{\partial z_{ix}}\,\Delta z_{ix} + \frac{\partial H}{\partial z_{iy}}\,\Delta z_{iy}\right] dx dy + R_1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \iint\limits_{\Pi} \left[\frac{\partial H}{\partial z_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial z_{ix}} - \frac{d}{dy}\frac{\partial H}{\partial z_{iy}}\right] \Delta z_i\, dx\, dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^Y \left[\frac{\partial H}{\partial z_{ix}}\,\Delta z_i\right]_{x=0}^{x=X} dy + \int\limits_0^X \left[\frac{\partial H}{\partial z_{iy}}\,\Delta z_i\right]_{y=0}^{y=Y} dx \right\} + R_1,$$

где для $0 < \theta < 1$

$$R_1 = \frac{1}{2} \iint\limits_{\Pi} \sum_{i,j=1}^{3n} \frac{\partial^2 H(x,\, y,\, \psi,\, p + \theta\Delta p,\, u)}{\partial p_i\, \partial p_j}\, \Delta p_i\, \Delta p_j\, dx\, dy.$$

Таким образом, используя (1.10), приходим к равенству

$$\iint\limits_{\Pi} \Delta_p H(x,\, y,\, \psi^0, p^0,\, u^0)\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Pi} \left[\frac{\partial H}{\partial z_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial z_{ix}}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial H}{\partial z_{iy}}\right)\right] \Delta z_i\, dx\, dy +$$

$$+ \int\limits_0^Y \frac{\partial H(X,\, y)}{\partial z_{ix}}\, \Delta z_i(X,\, y)\, dy + \int\limits_0^X \frac{\partial H(x,\, Y)}{\partial z_{iy}} \Delta z_i(x,\, Y)\, dx + R_1.$$

Введем обозначение $\langle a,\, b\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$. Тогда равенство (1.11) можно представить в виде

$$-\sum_{i=1}^{n} c_i \Delta z_i(X,\, Y) - \int\limits_0^X \left\langle \psi_x^0(x, Y) + \frac{\partial H(x, Y)}{\partial z_y},\, \Delta z(x, Y)\right\rangle dx -$$
$$- \int\limits_0^Y \left\langle \psi_y^0(X,\, y) + \frac{\partial H(X,\, y)}{\partial z_x},\, \Delta z(X,\, y)\right\rangle dy +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Pi} \left[\psi_{i\,xy}^{\,0} - \frac{\partial H}{\partial z_i} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial z_{ix}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial H}{\partial z_{iy}}\right)\right] \Delta z_i dx dy -$$
$$- \iint\limits_{\Pi} \Delta_u H(x,\, y,\, \psi^0,\, p^0,\, u^0)\, dx\, dy - R - R_1 = 0. \quad (1.12)$$

Затем учтем, что функции $\boldsymbol{\psi}^0$ удовлетворяют уравнениям (1.5) и (1.6). Поэтому равенство (1.12) принимает следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \Delta z_i(X,\, Y) =$$
$$= -\iint\limits_{\Pi} \Delta_u H(x,\, y,\, \psi^0,\, p^0,\, u^0)\, dx\, dy - R_0, \quad (1.13)$$

где $R_0 = R + R_1$.

Левая часть (1.13) есть ΔS — приращение функционала S. В работе **[63]** показано, что слагаемое R_0 является малой величиной относительно Δu более высокого порядка, чем первое слагаемое в правой части полученного равенства. Таким образом, знак ΔS при интегрально малых возмущениях управления u^0 определяется знаком выражения $-\iint\limits_{\Pi} \Delta_u H(x,\, y,\, \psi^0,\, p^0, u^0)\, dx\, dy$. Поскольку имеет место неравенство: $-\iint\limits_{\Pi} \Delta_u H(x,\, y,\, \psi^0,\, p^0,\, u^0)\, dx\, dy \geqslant 0$, то выполняется $\Delta S \geqslant 0$ и, следовательно, функционал S достигает минимума на u^0.

Нетрудно показать, что для системы уравнений

$$z_{ixy} = \sum_{r=1}^{n} [a_{ik}(x,y)z_k + b_{ik}(x,y)z_{kx} + c_{ik}(x,y)z_{ky}] + \\ + \sum_{j=1}^{r} d_{ij}(x,y)u_j(x,y), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$R = 0$ и равенство (1.13) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \, \Delta z_i(X, Y) = -\iint\limits_{\Pi} \Delta_u H(x, y, \psi^0, p^0, u^0) \, dx \, dy,$$

из которого следует, что в этом случае необходимые условия оптимальности являются достаточными.

Теорема полностью доказана.

Рассмотренная задача в некотором смысле является стандартной. К ней можно свести ряд других задач подобного типа. Рассмотрим некоторые из них.

1.3. Задачи, приводящиеся к стандартной задаче. Пусть процесс описывается скалярным уравнением:

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y, u), \tag{1.14}$$

в прямоугольнике $\Pi = \{ (x, y) \colon 0 < x < X, \ 0 < y < Y \}$ с граничными условиями:

$$\begin{aligned} z(x, 0) &= \varphi^1(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant X, \\ z(0, y) &= \varphi^2(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant Y. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Допустимые управления u принимают значения на множестве G, где G представляет собой либо отрезок $[a, b]$, либо интервал (a, b), либо один из полуинтервалов $[a, b)$, $(a, b]$. При этом каждому управлению $u = u(x, y)$ со значениями из G соответствует единственное решение задачи (1.14)–(1.15).

Задача 1.2. *Среди всех допустимых управлений найти такое управление, что на соответствующем ему решении задачи* (1.14)–(1.15) *функционал* J *достигает минимального значения.*

I. Предположим, что

$$J = \iint_{\Pi} f_0(x,\, y,\, z,\, z_x,\, z_y,\, u)\, dx\, dy. \tag{1.16}$$

Для решения задачи введем вспомогательную функцию:

$$z_0(x,\, y) = \int_0^x \int_0^y f_0(s,\, v,\, z,\, z_s,\, z_v,\, u)\, ds\, dv.$$

Функция z_0 удовлетворяет уравнению

$$z_{0xy} = f_0(x,\, y,\, z,\, z_x,\, z_y,\, u) \tag{1.17}$$

и граничным условиям:

$$z_0(x,\, 0) = z_0(0,\, y) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant X, \quad 0 \leqslant y \leqslant Y. \tag{1.18}$$

Будем рассматривать процесс, описываемый уравнениями (1.14) и (1.17) с граничными условиями (1.15) и (1.18). Функционал (1.16) имеет следующий вид: $J = z_0(X,\, Y)$. Очевидно, что это частный случай рассматриваемого функционала $S = c_1 z(X,\, Y) + c_2 z_0(X,\, Y)$ при $c_1 = 0$ и $c_2 = 1$.

Таким образом, решение задачи 1.2 сводится к решению задачи 1.1.

II. Пусть задан функционал

$$J = \int_0^X f_0\big(x,\, z(x,\, Y),\, z_x(x,\, Y)\big)\, dx. \tag{1.19}$$

Далее, вводим вспомогательную функцию:

$$z_0(x,\, y) = \int_0^x f_0\big(s,\, z(s,\, y),\, z_s(s,\, y)\big)\, ds.$$

Для введенной функции z_0 справедливо следующее выражение: $z_{0x} = f_0(x,\, z(x,\, y),\, z_x(x,\, y))$. Используя уравнение

(1.14), получаем

$$z_{0xy} = \frac{\partial f_0}{\partial z}\, z_y + \frac{\partial f_0}{\partial z_x}\, f(x,\, y,\, z,\, z_x,\, z_y,\, u). \qquad (1.20)$$

При этом выполняются граничные условия:

$$z_0(0,\, y) = 0, \qquad z_0(x,\, 0) = \int\limits_0^x f_0\bigl(x,\, \varphi^1,\, (\varphi^1)'\bigr)\, dx \qquad (1.21)$$

для $0 \leqslant y \leqslant Y$ и $0 \leqslant x \leqslant X$ соответственно.

Поэтому можно рассматривать процесс, описываемый уравнениями (1.14), (1.20) с граничными условиями (1.15) и (1.21). Функционал (1.19) имеет вид $J = z_0(X,\, Y)$.

Следовательно, решение задачи 1.2 сводится к решению задачи 1.1.

III. Для функционала

$$J = \int\limits_0^Y f_0\bigl(y,\, z(X,\, y),\, z_y(X,\, y),\, u\bigr)\, dy$$

введением вспомогательной функции:

$$z_0(x,\, y) = \int\limits_0^y f_0(v,\, z(x,\, v),\, z_v(x,\, v),\, u)\, dv$$

задачу 1.2 можно свести к задаче 1.1.

IV. Для функционала $J = f_0(X,\, Y,\, z(X,\, Y), u)$, здесь f_0 — некоторая заданная функция, затем введение функции $z_0(x, y) = f_0(x,\, y,\, z(x,\; y), u)$ также позволяет свести решение задачи 1.2 к решению задачи 1.1.

Замечание 1.1. Обратим внимание на тот факт, что, вообще говоря, не для любого функционала J рассматриваемая процедура может свести решение задачи 1.2 к решению задачи 1.1. Например, это нельзя сделать для функционала $J = \max |z(X,\, Y)|$, где максимум берется по всем допустимым управлениям.

Замечание 1.2. В рассмотренных примерах приведена формальная процедура сведения различных задач к стандартной форме. Для применения принципа максимума в каждом конкретном случае требуется проверять, выполняются ли все условия в полученной новой задаче, при которых применим принцип максимума.

2. Принцип максимума для линейных систем

2.1. Анализ принципа максимума. Если система уравнений (1.1) линейна относительно совокупности переменных z, z_x, z_y и u, то, как уже отмечалось в теореме 1.1, условие принципа максимума является и достаточным.

Проанализируем краевую задачу (1.5)–(1.7). Поскольку функция H линейна относительно ψ_i, $i = 1, \ldots, n$, то система (1.5) линейна.

Рассмотрим первую систему в (1.6). Поскольку X фиксировано, то она представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменной y с начальными условиями (1.7). Таким образом, функции $\widetilde{\psi}_i(y) = \psi_i(X, y)$, $i = 1, \ldots, n$ определяются однозначно. Аналогично из (1.6) и (1.7) однозначно определяются и функции $\hat{\psi}_i(x) = \psi_i(x, Y)$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, имеет место следующая краевая задача для $i = 1, \ldots, n$:

$$
\begin{aligned}
&z_{ixy} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i},\ \psi_{ixy} = \frac{\partial H}{\partial z_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial z_{ix}}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial H}{\partial z_{iy}}\right);\\
&z_i(x, 0) = \varphi_i^1(x), \quad \psi_i(x, Y) = \hat{\psi}_i(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant X;\\
&z_i(0, y) = \varphi_i^2(y), \quad \psi_i(X, y) = \widetilde{\psi}_i(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant Y.
\end{aligned}
$$

Функции z_i заданы на границе $x = 0$ и $y = 0$ прямоугольника П, в то время как функции ψ_i заданы на границах $x = X$ и $y = Y$ прямоугольника П. Тем самым функции z_i и ψ_i заданы на разных частях границы заданного прямоугольника П.

Проанализируем экстремальные свойства функции H. Для этого предположим, что система (1.1) линейна. Пусть, например, дана следующая краевая задача:

$$
\begin{aligned}
z_{xy} = a(x,y) + a_1(x,y)\, z(x,y) + a_2(x,y)\, z_x(x,y) +&\\
+ a_3(x,y)\, z_y(x,y) + b(x,y)\, u(x,y) + f\bigl(x,\, y\bigr);&
\end{aligned}
$$

$$z(x,\,0)=\varphi^1(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant X;$$
$$z(0,\,y)=\varphi^2(y),\qquad 0\leqslant y\leqslant Y.$$

Заметим, что экстремальные по u свойства функции H зависят от слагаемого $b\,\psi\,u$. Проиллюстрируем сказанное.

1. Пусть допустимые управления $u=u(x,\,y)$ принимают значения на отрезке $[-1,\,1]$, т. е. $|u|\leqslant 1$. Тогда функционал $\Phi(u)=\iint\limits_{\Pi} b\psi u\,dx\,dy$ принимает наибольшее значение по u, если $u=\operatorname{sign}(b\psi)$.

2. Если допустимые управления зависят только от x, т. е. $u=u(x)$ и $|u|\leqslant 1$, тогда

$$\Phi(u)=\iint\limits_{\Pi} b\,\psi u(x)\,dx\,dy=\int\limits_0^X u(x)\left[\int\limits_0^Y b(x,\,y)\,\psi(x,\,y)\,dy\right]dx$$

и функционал $\Phi(u)$ достигает своего наибольшего значения при $u=\operatorname{sign}\left[\int\limits_0^Y b(x,\,y)\,\psi(x,\,y)\,dy\right]$.

3. Если допустимые управления зависят только от y, т. е. $u=u(y)$ и $|u|\leqslant 1$, то $\Phi(u)$ принимает наибольшее значение при $u=\operatorname{sign}\left[\int\limits_0^X b(x,\,y)\,\psi(x,\,y)\,dx\right]$.

Замечание 2.1. Для систем с распределенными параметрами можно в качестве допустимых рассматривать управления $u=u(x,y)$ с более сложными зависимостями от переменных x и y. Например, допустимыми управлениями могут быть функции только вида $u=u(x+y)$ или только вида $u=u(xy)$, что невозможно в системах с сосредоточенными параметрами, т. к. в них всего одна независимая переменная.

2.2. Примеры. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.1. Предположим, что процесс описывается следующей краевой задачей:

$$z_{xy} + 2z_x + z_y + 2z + u = 0, \qquad (x,\, y) \in \Pi;$$
$$z(x,\, 0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant X;$$
$$z(0,\, y) = 0, \qquad 0 \leqslant y \leqslant Y.$$

Допустимыми будем считать такие управления $u = u(x,\, y)$, что $|u| \leqslant 1$. Функционал S имеет вид: $S = z(X,\, Y)$.

Для решения задачи 1.1 воспользуемся принципом максимума. Строим функцию $H = -\psi(2z_x + z_y + 2z + u)$. Функция ψ является решением краевой задачи:

$$\psi_{xy} = -2\psi + 2\psi_x + \psi_y, \qquad (x, y) \in \Pi; \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \psi_y(X,\, y) - 2\psi(X,\, y) = 0, & 0 \leqslant y \leqslant Y; \\ \psi_x(x,\, Y) - \psi(x,\, Y) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant X; \\ \psi(X,\, Y) = -1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Решая начальную задачу (2.2) для $\psi = \psi(X,\, y)$, получаем решение $\psi(X,\, y) = Ce^{2y}$. Затем учтем начальное условие $\psi(X,\, Y) = -1$. Находим $\psi(X,\, y) = -e^{2(y-Y)}$. Аналогично решаем начальную задачу для функции $\psi = \psi(x,\, Y)$. Это решение имеет следующий вид: $\psi(x,\, Y) = -e^{x-X}$.

Заметим, что уравнение (2.1) можно представить следующим образом: $\dfrac{\partial}{\partial x}[\psi_y - 2\psi] = \psi_y - 2\psi$. Далее, обозначим $v = \psi_y - 2\psi$, тогда имеет место уравнение $\dfrac{\partial v}{\partial x} = v$ и его решение $v = C(y)e^x$.

Итак, $\psi_y - 2\psi = C(y)e^x$. Полученное уравнение решим методом вариации постоянной: $\psi = A(x,\, y)\, e^{2y}$. Тогда

$$A_y(x,\, y)\, e^{2y} = C(y)\, e^x, \qquad A(x,\, y) = B(x) - e^x \int\limits_y^Y C(s)\, e^{-2s}\, ds.$$

Следовательно,

$$\psi(x,\, y) = B(x)\, e^{2y} - e^x \int\limits_y^Y C(s)\, e^{2(y-s)}\, ds;$$
$$\psi(X,\, y) = -e^{2(y-Y)}; \qquad \psi(x,\, Y) = -e^{x-X}.$$

Подставляя граничные значения, определяем функции $B = B(x)$ и $C = C(y)$. В результате находим функцию $\psi(x, y) = -e^{(x-X)+2(y-Y)}$.

Таким образом, $\Phi(u) = \iint\limits_{\Pi} \psi(x, y)u(x, y)\,dx\,dy$ достигает максимального значения при $u = -1$. Если предположить, что допустимые управления есть управления вида $u = u(x)$, $|u| \leqslant 1$, то

$$\Phi(u) = \iint\limits_{\Pi} \psi(x, y)u(x)\,dx\,dy =$$
$$= -\int\limits_0^X e^{(x-X)}u(x)\,dx \int\limits_0^Y e^{2(y-Y)}\,dy =$$
$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^X e^{(x-X)}u(x)\bigl(1 - e^{-2Y}\bigr)\,dx.$$

Поскольку $1 - e^{-2Y} > 0$, то функция $\Phi(u)$ достигает максимального значения при $u = -1$.

Пример 2.2. Рассмотрим процесс, описываемый в прямоугольнике $\Pi = \{\,(x, y)\colon\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 2\,\}$ краевой задачей для функции $z = z(x, y)$ для $(x, y) \in \Pi$:

$$\begin{aligned}
&z_{xy} = -3z_x + 2z_y + 6z + (x-y)\bigl(1 - (x-y)^2\bigr)p;\\
&z(x, 0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2;\\
&z(0, y) = 0, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $p = p(y)$ — управляющая функция и $|p| \leqslant 1$.

Сформулируем задачу управления: *найти управляющую функцию $p = p(y)$, $|p| \leqslant 1$, такую, что соответствующее ей решение краевой задачи* (2.3) *доставляет минимум функционалу $S = z(2, 2)$.*

В соответствии с принципом максимума приходим к сопряженной задаче:

$$\psi_{xy} = 6\psi + 3\psi_x - 2\psi_y, \qquad (x, y) \in \Pi; \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} &\psi_x(x,\,2) = -2\psi(x,\,2), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2;\\ &\psi_y(2,\,y) = 3\psi(2,\,y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2;\\ &\quad\psi(2,\,2) = -1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Решение поставленной задачи (2.4)–(2.5) имеет следующий вид: $\psi(x,\,y) = -e^{2(2-x)}e^{-3(2-y)}$.

Согласно принципу максимума, чтобы найти оптимальное управление $p_0 = p_0(y)$, необходимо и достаточно (в силу линейности уравнения краевой задачи (2.3)), чтобы на функции p_0 выражение

$$\iint\limits_{\Pi} \psi(x,\,y)(x-y)\big(1-(x-y)^2\big)p(y)\,dx\,dy$$

принимало максимальное значение. Поскольку $|p| \leqslant 1$, то максимум достигается при

$$p_0(y) = -\mathrm{sign}\Big[\int\limits_0^2 e^{2(2-x)}e^{-3(2-y)}(x-y)\big(1-(x-y)^2\big)\,dx\Big].$$

Вычислим интеграл в полученном выражении:

$$-\int\limits_0^2 e^{2(2-x)}e^{-3(2-y)}(x-y)\big(1-(x-y)^2\big)\,dx =$$

$$= -\frac{e^{-6+3y}}{8}\big[4\big(e^4-1\big)y^3-6\big(e^4-5\big)y^2+2\big(e^4-37\big)y-\big(e^4-61\big)\big].$$

График многочлена

$$J(y) = \frac{1}{8}\big[4\big(e^4-1\big)y^3-6\big(e^4-5\big)y^2+2\big(e^4-37\big)y-\big(e^4-61\big)\big]$$

изображен на рис. 2.2.1. Многочлен $J = J(y)$ на отрезке $[0,\,2]$ имеет два нуля: $a \approx 0.249$ и $b \approx 1.236$. Это и есть точки переключения оптимального управления p_0. Поэтому

$$p_0(y) = \begin{cases} -1, & 0 < y < a;\\ 1, & a < y < b;\\ -1, & b < y < 2. \end{cases}$$

График оптимального управления изображен на рис. 2.2.1.

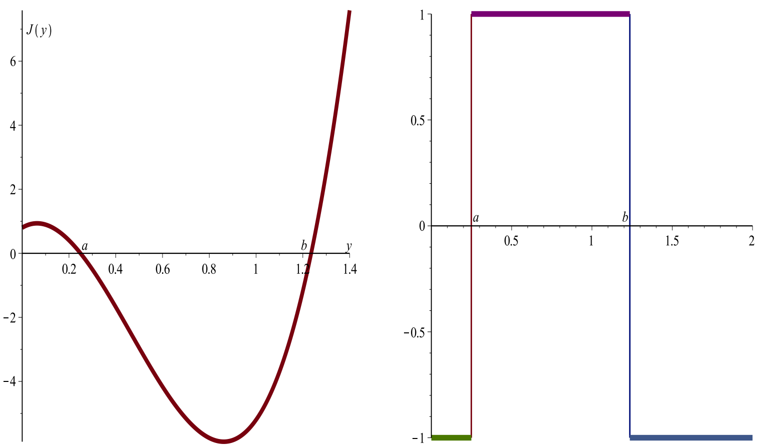

Рис. 2.2.1

Пример 2.3. Процесс описывается краевой задачей:

$$z_{xy} = -2z + 2z_y + z_x + cp, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2. \quad (2.6)$$

Здесь c — заданная функция, а p — управляющая функция. При этом класс допустимых управлений пока не будем определять. Начальные условия имеют вид:

$$z(0, y) = z(x, 0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2. \qquad (2.7)$$

Сформулируем задачу: *найти управление* $p = p(x,\, y)$ *такое, что соответствующее ему решение* $z = z(x,\, y)$ *краевой задачи* (2.6)–(2.7) *доставляло бы минимум функционалу* $S = az(1,\, 2)$.

Воспользуемся принципом максимума. Введем функцию $H = \psi\big(-2z + 2z_y + z_x + cp\big)$ и в соответствии с принципом максимума составим сопряженную систему:

$$\psi_{xy} = \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial z_x}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial H}{\partial z_y}\right) \qquad (2.8)$$

для $0 < x < 1,\ 0 < y < 2$. Далее

$$\psi_x(x,\, 2) = -\frac{\partial H(x,\, 2)}{\partial z_y}, \quad \psi_y(1,\, y) = -\frac{\partial H(1,\, y)}{\partial z_x}, \qquad (2.9)$$

$$\psi(1,\,2) = -a. \tag{2.10}$$

Тогда уравнение (2.8), с учетом вида функции H, принимает вид

$$\psi_{xy} = -2\psi - \psi_x - 2\psi_y, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2. \tag{2.11}$$

Граничные условия (2.9) перепишем следующим образом:

$$\psi_x(x,\,2) = -2\psi(x,\,2), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{2.12}$$

$$\psi_y(1,\,y) = -\psi(1,\,y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2. \tag{2.13}$$

Решаем задачи Коши (2.12) и (2.10), а также (2.13) и (2.10), получаем следующие решения:

$$\psi(x,\,2) = -ae^{-2(x-1)}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{2.14}$$

$$\psi(1,\,y) = -ae^{-(y-2)}, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2. \tag{2.15}$$

Перепишем уравнение (2.11): $\dfrac{\partial}{\partial x}\bigl(\psi_y+\psi\bigr) = -2\bigl(\psi_y+\psi\bigr)$. Тогда выполняется $\psi_y + \psi = C(y)e^{-2(x-1)}$, решая полученное уравнение, а также из выражений (2.10), (2.14) и (2.15) находим функцию ψ: $\psi(x,\,y) = -a\,e^{-2(x-1)}\cdot e^{-(y-2)}$.

Таким образом, надо найти управляющую функцию p, на которой функционал $\displaystyle\int\limits_0^1\int\limits_0^2 H\bigl(\psi,\,z,\,z_x,\,z_y,\,p\bigr)\,dy\,dx$ принимает максимальное значение. Однако от $p = p(x,\,y)$ зависит только одно слагаемое, поэтому ищем такую управляющую функцию $p = p(x,\,y)$, на которой

$$-a\int\limits_0^1\int\limits_0^2 e^{-2(x-1)}\cdot e^{-(y-2)}\cdot c(x,\,y)\cdot p(x,\,y)\,dy\,dx \to \max.$$

Рассмотрим возможные частные случаи.

1) Пусть $a > 0$, а допустимые управления $p = p(x,\,y)$ ограничены, т. е. $\bigl|p(x,\,y)\bigr| \leqslant A$. Тогда

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^2 e^{-2(x-1)}\cdot e^{-(y-2)}\cdot c(x,\,y)\cdot p(x,\,y)\,dy\,dx \to \min.$$

Поскольку $e^{-2(x-1)}\cdot e^{-(y-2)} > 0$, то оптимальное управление p_0 имеет следующий вид: $p_0(x,\,y) = -A\operatorname{sign}\bigl[c(x,\,y)\bigr]$.

2) Предположим, что $a < 0$, а допустимые управляющие функции $p = p(x,\, y)$ ограничены, т. е. $\bigl|p(x,\, y)\bigr| \leqslant A$. Оптимальное управление p_0: $p_0(x,\, y) = A \operatorname{sign}\bigl[c(x,\, y)\bigr]$.

3) Пусть $a > 0$, а допустимые управления имеют вид $p = p(x)$ и $\bigl|p(x)\bigr| \leqslant A$. Имеем оптимальное управление p_0:
$$p_0(x) = -A \operatorname{sign}\left[\int\limits_0^2 e^{-(y-2)} c(x,\, y)\, dy\right].$$

Аналогично можно рассмотреть и случай $p = p(y)$.

4) Справедливо $a > 0$, а допустимые управления имеют следующий вид: $p = p(x+y)$ и ограничены $|p| \leqslant A$. Выполнено $\int\limits_0^1 \int\limits_0^2 e^{-2(x-1)} \cdot e^{-(y-2)} \cdot c(x,\, y) \cdot p(x+y)\, dy\, dx \to \min$.

Сделаем замену $z = x + y$, тогда

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^2 e^{-2(x-1)} \cdot e^{-(y-2)} \cdot c(x,\, y) \cdot p(x+y)\, dy\, dx =$$
$$= \int\limits_0^2 dy \int\limits_y^{y+1} e^{-2z+y+4} \cdot p(z)\, c(z-y,\, y)\, dz =$$
$$= \int\limits_0^1 e^{-2z} p(z)\, dz \int\limits_0^z e^{y+4} c(z-y,\, y)\, dy +$$
$$+ \int\limits_1^2 e^{-2z} p(z)\, dz \int\limits_{z-1}^z e^{y+4} c(z-y,\, y)\, dy +$$
$$+ \int\limits_2^3 e^{-2z} p(z)\, dz \int\limits_{z-1}^2 e^{y+4} c(z-y,\, y)\, dy.$$

Следовательно, оптимальное управление p_0 определяется следующим образом:

$$p_0(z) = \begin{cases} p_0^1(z) = -A\,\mathrm{sign}\Big[\int\limits_0^z e^y c(z-y,\,y)\,dy\Big], & 0 \leqslant z < 1; \\ p_0^2(z) = -A\,\mathrm{sign}\Big[\int\limits_{z-1}^z e^y c(z-y,\,y)\,dy\Big], & 1 \leqslant z \leqslant 2; \\ p_0^3(z) = -A\,\mathrm{sign}\Big[\int\limits_{z-1}^2 e^y c(z-y,\,y)\,dy\Big], & 2 \leqslant z \leqslant 3. \end{cases}$$

Теперь учтем, что $z = x + y$, т. е. найденная оптимальная управляющая функция p_0 зависит от переменных x и y. Тогда прямоугольник $\Pi = \{\,(x,\,y)\colon 0 < x < 1,\ 0 < y < 2\,\}$ разбивается на три области: Π_1, Π_2 и Π_3, на которых функция p_0 принимает значения p_0^1, p_0^2 и p_0^3 соответственно (см. рис. 2.2.2).

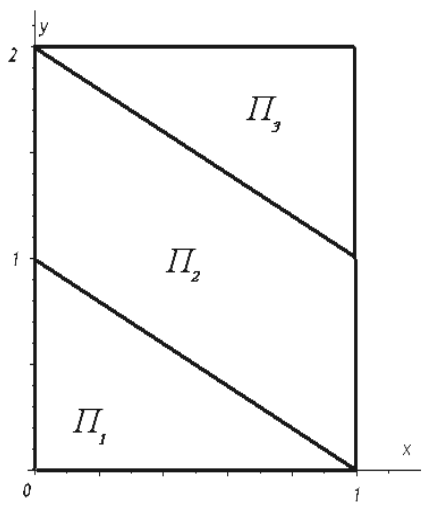

Рис. 2.2.2

Конкретизируем последний случай 4). Пусть $A = 1$ и функция c задана следующим образом: $c = \sin\pi(x + 2y)$.

Тогда $p_0(z) = \operatorname{sign} J(z)$, где $J = J(z)$ имеет следующий вид:

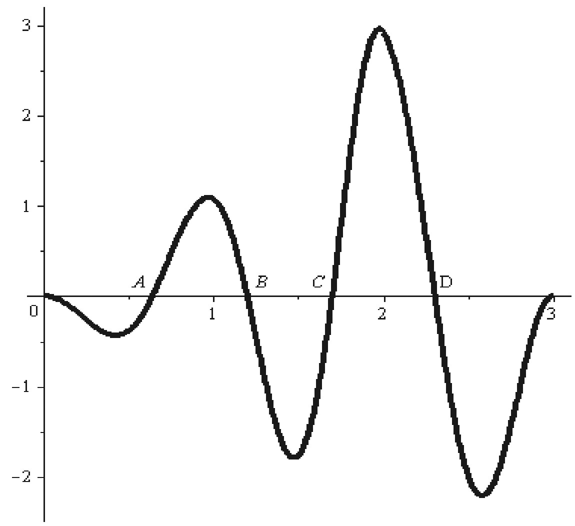

Рис. 2.2.3

$$
\begin{cases}
\dfrac{e^z}{\pi^2+1}\big[\pi\cos 2\pi z - \sin 2\pi z\big] - \dfrac{1}{\pi^2+1}\big[\pi\cos\pi z - \sin\pi z\big], \\
\hfill 0 \leqslant z \leqslant 1; \\
\dfrac{e^z}{\pi^2+1}\big[\pi\cos 2\pi z - \sin 2\pi z\big]\Big(1+\dfrac{1}{e}\Big), \qquad 1 \leqslant z \leqslant 2; \\
\dfrac{e^2}{\pi^2+1}\big[\pi\cos\pi z - \sin\pi z\big] + \dfrac{e^{z-1}}{\pi^2+1}\big[\pi\cos 2\pi z - \sin 2\pi z\big], \\
\hfill 2 \leqslant z \leqslant 3.
\end{cases}
$$

График функции $J = J(z)$ представлен на рис. 2.2.3. На этом графике точки $A = (a,\, 0)$, $B = (b,\, 0)$, $C = (c,\, 0)$ и $D = (d,\, 0)$ имеют абсциссы, равные:

$$a \approx 0.642, \quad b \approx 1.201, \quad c \approx 1.701, \quad d \approx 2.305.$$

Далее учтем, что $z = x + y$, поэтому прямоугольник Π разбивается на пять областей Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 и Π_5 (см. рис. 2.2.4).

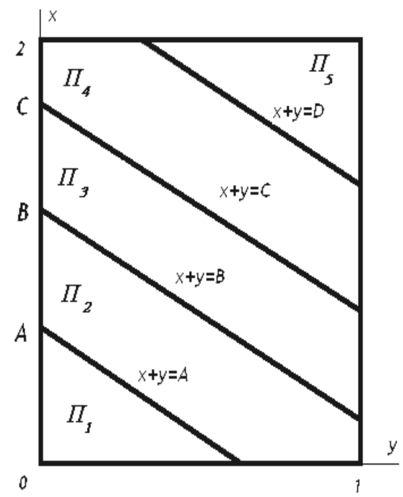

Рис. 2.2.4

Таким образом, оптимальное управление $p_0 = p_0(x+y)$ принимает следующие значения:

$$p_0(x+y) = \begin{cases} -1, & (x,\, y) \in \Pi_1,\ \Pi_3,\ \Pi_5; \\ 1, & (x,\, y) \in \Pi_2,\ \Pi_4. \end{cases}$$

Пример 2.4. Пусть функция $z = z(x, y)$ удовлетворяет краевой задаче в $\Pi = \{\,(x,\, y)\colon\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 2\,\}$:

$$\begin{aligned} &z_{xy} = z_x + 4z_y - 4z + (x^2-1)\,e^x p, \qquad (x,\, y) \in \Pi; \\ &z(x,\, 0) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ &z(0,\, y) = 0, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1, \end{aligned} \tag{2.16}$$

при этом допустимые управления вида $p = p(x+y)$ ограничены $|p| \leqslant 1$.

Требуется найти функцию $p = p(x+y)$, $|p| \leqslant 1$, для которой решение $z = z(x,\, y)$ краевой задачи (2.16) доставляло бы минимум функционалу $S = z(2,\, 1)$.

Воспользуемся принципом максимума. Введем вспомогательную функцию $H = \psi\left(z_x + 4z_y - 4z + (x^2-1)\,e^x p\right)$.

В соответствии с принципом максимума получаем сопряженную систему:

$$\psi_{xy} = -4\psi - \psi_x - 4\psi_y, \qquad (x,\, y) \in \Pi; \tag{2.17}$$

$$\begin{gathered} \psi_x(x,\, 1) = -4\psi(x,\, 1), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ \psi_y(2,\, y) = -\psi(2,\, y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1; \\ \psi(2,\, 1) = -1. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Найдем решения задач (2.18):

$$\begin{gathered} \psi(x,\, 1) = -e^{8-4x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ \psi(2,\, y) = -e^{1-y}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{gathered} \tag{2.19}$$

Перепишем уравнение (2.17): $\dfrac{\partial}{\partial x}\big(\psi_y + \psi\big) = -4\big(\psi_y + \psi\big)$. Тогда выполняется $\psi_y + \psi = C(y)\, e^{8-4x}$. Решим полученное уравнение, используя выражения (2.19) и $\psi(2,\, 1) = -1$. Находим функцию $\psi = \psi(x,\, y)$: $\psi(x,\, y) = -e^{8-4x}e^{1-y}$.

Таким образом, надо найти функцию $p = p(x+y)$, на которой функционал $\displaystyle\iint\limits_{\Pi} H\big(\psi,\, z,\, z_x,\, z_y,\, p\big)\, dx\, dy$ принимает максимальное значение, т. е.

$$\iint\limits_{\Pi} e^{8-4x}e^{1-y}(x^2-1)\, e^x p(x+y)\, dx\, dy \to \min_{|p| \leqslant 1}.$$

Сделаем замену $z = x + y$, тогда

$$\int\limits_0^2 \int\limits_x^{x+1} e^{8-4x}e^{1-z+x}(x^2-1)\, e^x p(z)\, dx\, dz =$$

$$= e^8 \Bigg\{ \int\limits_0^1 e^{-z}p(z)\, dz \int\limits_0^z e^{-2x}(x^2-1)\, dx + \int\limits_1^2 e^{-z}p(z)\, dz \int\limits_{z-1}^z e^{-2x}(x^2-1)\, dx + \int\limits_2^3 e^{-z}p(z)\, dz \int\limits_{z-1}^2 e^{-2x}(x^2-1)\, dx \Bigg\}.$$

Оптимальное управление $p_0 = p_0(z)$ определяется следующим образом:

$$p_0(z) = \begin{cases} -\operatorname{sign}\left[\displaystyle\int_0^z e^{-2x}(x^2-1)\,dx\right], & 0 \leqslant z \leqslant 1; \\ -\operatorname{sign}\left[\displaystyle\int_{z-1}^z e^{-2x}(x^2-1)\,dx\right], & 1 \leqslant z \leqslant 2; \\ -\operatorname{sign}\left[\displaystyle\int_{z-1}^2 e^{-2x}(x^2-1)\,dx\right], & 2 \leqslant z \leqslant 3. \end{cases}$$

Учитывая, что $\displaystyle\int e^{-2x}(x^2-1)\,dx = -\frac{1}{4}\,e^{-2x}(2x^2+2x-1)$, находим $p_0(z) = \operatorname{sign} J(z)$, $0 \leqslant z \leqslant 3$, где

$$J(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\left[e^{-2z}(2z^2+2z-1)+1\right], & 0 \leqslant z \leqslant 1; \\ \dfrac{e^{-2z}}{4}\left[2(1-e^2)z^2+2(1+e^2)z-(1-e^2)\right], & \\ & 1 \leqslant z \leqslant 2; \\ \dfrac{1}{4}\left[11e^{-4}-e^{-2z+2}(2z^2-2z-1)\right], & 2 \leqslant z \leqslant 3. \end{cases}$$

График функции $J = J(z)$ для $0 \leqslant z \leqslant 3$ представлен на рис. 2.2.5. Точка a переключения управления равна

$$a = \frac{1+e^2+\sqrt{3e^4-2e^2+3}}{2(e^2-1)} \approx 1.62.$$

Вспомним, что $z = x+y$ и функция $p_0 = p_0(x+y)$ определена на прямоугольнике Π. Этот прямоугольник разбивается на две области Π_1 и Π_2, на которых функция p_0 принимает значения 1 и -1 соответственно (см. рис. 2.2.5).

Пример 2.5. Рассмотрим процесс, описываемый в прямоугольнике $\Pi = \{\,(x,\,y)\colon\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\,\}$ краевой задачей для функции $z = z(x,\,y)$:

$$\begin{cases} z_{xy} = -3z_x + 2z_y + 6z + (x-y)p, & (x,\,y) \in \Pi; \\ z(x,\,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant X; \\ z(0,\,y) = 0, & 0 \leqslant y \leqslant Y. \end{cases} \tag{2.20}$$

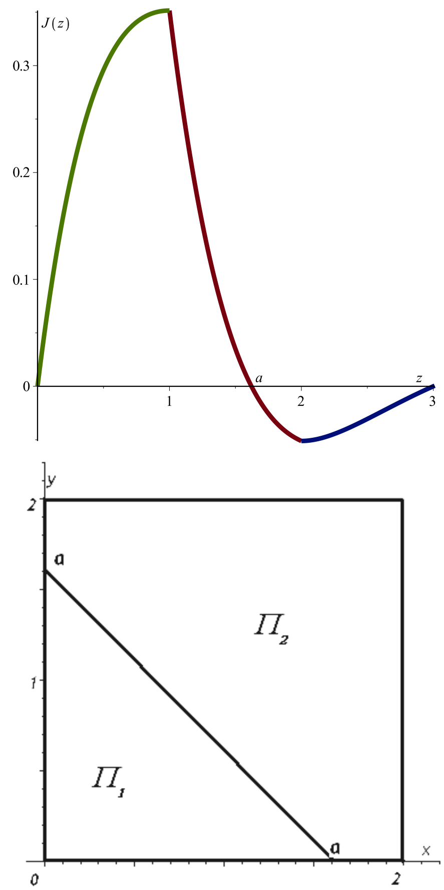

Рис. 2.2.5

Здесь $p = p(y)$ — управляющая функция и $|p| \leqslant 1$.

Сформулируем задачу управления. *Найти управляющую функцию* $p = p(y)$, $|p| \leqslant 1$, *такую, что соответствующее ей решение краевой задачи* (2.3) *доставляет минимум функционалу* $S = \sin(X - Y)z(X, Y)$.

Введем вспомогательную функцию:

$$H = \psi\left(-3z_x + 2z_y + 6z + (x - y)\,p\right).$$

В соответствии с принципом максимума получаем сопряженную систему:

$$\psi_{xy} = 6\psi + 3\psi_x - 2\psi_y, \qquad (x,\,y) \in \Pi; \tag{2.21}$$

$$\begin{gathered}\psi_x(x,\,Y) = 2\psi(x,\,Y), \qquad 0 \leqslant x \leqslant X;\\ \psi_y(X,\,y) = -3\psi(X,\,y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant Y;\\ \psi(X,\,Y) = -\sin(X-Y).\end{gathered} \tag{2.22}$$

Найдем решения задач (2.22):

$$\begin{gathered}\psi(x,\,Y) = -e^{-2(X-x)}\sin(X-Y), \quad 0 \leqslant x \leqslant X;\\ \psi(X,\,y) = -e^{3(Y-y)}\sin(X-Y), \quad 0 \leqslant y \leqslant Y.\end{gathered} \tag{2.23}$$

Перепишем (2.21): $\dfrac{\partial}{\partial x}\big(\psi_y - 3\psi\big) = -2\big(\psi_y - 3\psi\big)$. Тогда выполняется $\psi_y - 3\psi = C(y)\,e^{-2(X-x)}$. Решим полученное уравнение, используя выражения (2.23) и равенство $\psi(X,\,Y) = -\sin(X-Y)$. Находим выражение для функции $\psi = \psi(x,\,y)$: $\psi(x,\,y) = -e^{-2(X-x)}e^{3(Y-y)}\sin(X-Y)$.

Таким образом, надо найти функцию $p = p(x+y)$, на которой функционал $\displaystyle\iint\limits_{\Pi} H\big(\psi,\, z,\, z_x,\, z_y,\, p\,\big)\,dx\,dy$ принимает максимальное значение, т. е.

$$\sin(X-Y)\iint\limits_{\Pi} e^{-2(X-x)}e^{3(Y-y)}\,(x-y)\,p(y)\,dx\,dy \to \max_{|p|\leqslant 1}.$$

Это соотношение можно представить в виде

$$\sin(X-Y)\int\limits_0^Y e^{3(Y-y)}\,p(y)\int\limits_0^X e^{-2(X-x)}(x-y)\,dx\,dy \to \max_{|p|\leqslant 1}.$$

Отсюда следует, что оптимальное по функционалу S управление определяется по формуле для $0 \leqslant y \leqslant Y$:

$$p_0(y) = \operatorname{sign}\left\{\int\limits_0^X (x-y)\,e^{-2(X-x)}\,dx\,\sin(X-Y)\right\}.$$

Вычислим интеграл, находим для $0 \leqslant y \leqslant Y$:

$$p_0(y) = \operatorname{sign}\left\{\frac{1}{2}\left(X - \left(y + \frac{1}{2}\right)\left(1 - e^{-2X}\right)\right)\sin(X - Y)\right\}.$$

Пример 2.6. Вновь рассмотрим управляемый процесс, который описывается соотношениями (2.20). Критерием оптимальности возьмем функционал

$$J = \int\limits_0^X \int\limits_0^Y \sin(x - y)\, z(x, y)\, dy\, dx,$$

допустимыми управлениям будем брать функции $p = p(y)$, $|p| \leqslant 1$.

В соответствии с теорией вводим функцию $z_0 = z_0(x, y)$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &z_{0xy} = \sin(x - y)\, z(x, y),\\ &z_0(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant X,\\ &z_0(0, y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant Y. \end{aligned}$$

Для получения условий оптимальности строим функцию H, которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$H = \psi_0 \sin(x - y)\, z + \psi\left(-3z_x + 2z_y + 6z + (x - y)\, p\right).$$

Составляем уравнения, определяющие функции ψ_0 и ψ:

$$\begin{aligned} &\psi_{0xy} = 0, \quad \psi_{0x}(x, Y) = 0, \quad \psi_{0y}(X, y) = 0,\\ &\psi_0(X, y), = -1, \quad 0 \leqslant x \leqslant X, \quad 0 \leqslant y \leqslant Y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\psi_{xy} = \psi_0 \sin)(x - y) + 6\psi - 2\psi_x + 3\psi_y,\\ &\psi_x(x, Y) = 3\psi(x, Y), \quad \psi_y(X, y) = -2\psi(X, y),\\ &\psi(X, Y) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant X, \quad 0 \leqslant y \leqslant Y. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Следовательно, $\psi_0(x, y) = -1$.

Далее решаем краевую задачу (2.24) при найденной функции $\psi_0(x, y)$. Из граничных условий получаем

$$\psi(x, Y) = \psi(X, y) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant X, \quad 0 \leqslant y \leqslant Y. \tag{2.25}$$

Уравнение из (2.24) записываем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi_y + 2\psi) - 3(\psi_y + 2\psi) = -\sin)(x - y).$$

Полагая $\psi_y + 2\psi = z$, получаем уравнение

$$z_y - 3z = -sin(x - y), \quad 0 \leqslant x \leqslant X, \quad 0 \leqslant y \leqslant Y.$$

Общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$z_0(x, y) = C(x)e^{3(y-Y)} + \int\limits_y^Y e^{3(y-s)} \sin(x - s)\, ds.$$

Решая уравнение $\psi_y + 2\psi = z_0$ с учетом граничных условий (2.25), получаем

$$\psi(x, y) = -\int\limits_x^X \int\limits_y^Y e^{3(y-s)-2(x-t)} \sin(t - s)\, ds\, dt \tag{2.26}$$

Согласно условию максимума функции H, на оптимальном управлении имеем

$$\int\limits_0^X \int\limits_0^Y \psi(x, y)(x - y)(p(y)\, dy\, dx = \max.$$

Учитывая формулу (2.26), находим, что оптимальное управление имеет вид:

$$p(y) = \operatorname{sign}\left\{-\int\limits_0^X (x - y) \int\limits_x^X \int\limits_y^Y e^{3(y-s)-2(x-t)} \sin(t - s)\, ds\, dt\, dx\right\}.$$

3. Обобщение стандартной задачи

3.1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс, который описывается уравнениями:

$$z_{ixy} = f_i\bigl(x,\, y,\, p(x,\, y),\, u(x,\, y)\bigr), \qquad i = 1,\, \ldots,\, n, \tag{3.1}$$

где

$$z = \bigl\{z_1,\, \ldots,\, z_n\bigr\}, \quad p = \bigl\{z,\, z_x,\, z_y\bigr\}, \quad u = \bigl\{u_1,\, \ldots,\, u_r\bigr\},$$

$$(x,\, y) \in \Pi, \qquad \Pi = \{(x, y) : 0 < x < X,\ 0 < y < Y\}.$$

Пусть далее выполняется

$$\begin{cases} z_{ix}(x,\,0) = f_i^1(x,\,z(x,\,0),\,v), & 0 \leqslant x \leqslant X, \\ z_{iy}(0,\,y) = f_i^2(y,\,z(0,\,y),\,w), & 0 \leqslant y \leqslant Y, \\ z_i(0,0) = 0, \qquad i = 1,\,2,\,\ldots,\,n, \end{cases} \tag{3.2}$$

здесь $v = \{v_1, \ldots, v_s\}$, $w = \{w_1, \ldots, w_t\}$.

Предположим, что u принимает значения на некотором множестве $G \subset \mathbb{R}^r$, где G — область или ее замыкание (возможно, что к области G присоединены не все ее граничные точки). Предполагаем, что $v = \{v_1, \ldots, v_s\} \in G_1 \subset \mathbb{R}^s$, а $w = \{w_1, \ldots, w_t\} \in G_2 \subset \mathbb{R}^t$.

При этом *допустимыми управлениями* будем считать такие функции $\omega = \omega(x,\,y) = \{u(x,y), v(x), w(y)\}$, которые принимают значения в $G \times G_1 \times G_2$ и удовлетворяют следующим условиям:

1) $u \in L_r(\Pi)$, $v \in L_s[0,\,X]$, $w \in L_t[0,\,Y]$, т. е.

$$\begin{gathered} \iint\limits_{\Pi} \sum_{i=1}^{r} \bigl|u_i(x,\,y)\bigr|\,dx\,dy < \infty, \\ \int\limits_0^X \sum_{i=1}^{s} \bigl|v_i(x)\bigr|\,dx < \infty, \qquad \int\limits_0^Y \sum_{i=1}^{t} \bigl|w_i(y)\bigr|\,dy < \infty; \end{gathered} \tag{3.3}$$

2) при каждом управлении ω задача (3.1)–(3.2) имеет единственное решение $z_i = z_i\bigl(x,\,y,\,\omega(x,\,y)\bigr)$, $i = 1,\,\ldots,\,n$.

Будем предполагать также, что z обладает всеми необходимыми производными. На множестве полученных решений z определим функционал

$$S = \sum_{i=1}^{n} \bigl[c_i\, z_i(X,\,Y) + c_i^1\, z_i(X,\,0) + c_i^2\, z_i(0,\,Y)\bigr], \tag{3.4}$$

где c_i, c_i^1, c_i^2 — заданные постоянные, $i = 1,\,\ldots,\,n$.

Задача 3.1. *Среди всех допустимых управлений ω найти такое управление $\omega^0(x,\,y) = \{u^0(x,y),\,v^0(x), w^0(y)\}$, что на соответствующем решении $z = z\bigl(x,\,y,\,\omega^0(x,\,y)\bigr)$ задачи (3.1)–(3.2) функционал S достигает минимального значения.*

3.2. Принцип максимума. Введем функции:

$$H(x,\, y,\, \psi,\, p,\, u) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i\, f_i(x,\, y,\, p,\, u), \qquad (x,\, y) \in \bar{\Pi},$$

$$h^1(x,\, \phi,\, z(x,\, 0),\, v) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i\, f_i^1(x,\, z(x,\, 0),\, v), \quad 0 \leqslant x \leqslant X,$$

$$h^2(y,\, \chi,\, z(0,\, y),\, w) = \sum_{i=1}^{n} \chi_i\, f_i^2(y,\, z(0,\, y),\, w), \quad 0 \leqslant y \leqslant Y,$$

здесь использованы такие обозначения: $\psi = \{\psi_1,\, \ldots,\, \psi_n\}$, $\phi = \{\phi_1,\, \ldots,\, \phi_n\}$ и $\chi = \{\chi_1,\, \ldots,\, \chi_n\}$.

Вспомогательные функции $\psi_i = \psi_i(x,\, y)$, $i = 1,\, \ldots,\, n$ определим системой уравнений

$$\psi_{ixy} = \frac{\partial H}{\partial z_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial z_{ix}}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial H}{\partial z_{iy}}\right), \quad i = 1,\, \ldots,\, n, \tag{3.5}$$

с граничными условиями для $i = 1,\, \ldots,\, n$:

$$\begin{aligned} &\left[\psi_{ix} + \frac{\partial H}{\partial z_{iy}}\right](x,\, Y) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant X;\\ &\left[\psi_{iy} + \frac{\partial H}{\partial z_{ix}}\right](X,\, y) = 0, \qquad 0 \leqslant y \leqslant Y, \end{aligned} \tag{3.6}$$

и финальными условиями

$$\psi_i(X,\, Y) = -c_i. \tag{3.7}$$

Функции ϕ и χ определим с помощью следующих задач Коши для $i = 1,\, \ldots,\, n$:

$$\begin{aligned} &\frac{d\phi_i}{dx} + \frac{\partial h^1}{\partial z_i} = \left[\psi_{ix}(x,\, 0) + \left.\frac{\partial H}{\partial z_{iy}}\right|_{(x,0)}\right],\\ &\phi_i(X) - \psi_i(X,\, 0) = -c_i^1,\\ &\frac{d\chi_i}{dy} + \frac{\partial h^2}{\partial z_i} = \left[\psi_{iy}(0, y) + \left.\frac{\partial H}{\partial z_{ix}}\right|_{(0,y)}\right],\\ &\chi_i(Y) - \psi_i(0,\, Y) = -c_i^2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Справедлив принцип максимума.

Теорема 3.1. *Для того чтобы управление* $\omega = \omega^0(x, y)$ *было оптимальным, т. е. доставляло минимум функционалу* (3.4)*, необходимо, а в случае линейности системы*

(3.1)–(3.2) *и достаточно, чтобы функции* H, h^1 *и* h^2 *удовлетворяли следующим условиям:*[1]

$$\iint\limits_{\Pi} \Delta_u H\bigl(x,\, y,\, \psi^0,\, p^0,\, u^0\bigr)\, dx\, dy \leqslant 0, \tag{3.9}$$

$$\int\limits_0^X \Delta_v h^1\bigl(x,\, \phi^0,\, z^0(x,0),\, v^0\bigr)\, dx \leqslant 0, \tag{3.10}$$

$$\int\limits_0^Y \Delta_w h^2\bigl(y,\, \chi^0,\, z^0(0,y),\, w^0\bigr)\, dy \leqslant 0. \tag{3.11}$$

Здесь $p^0(x,\, y) = p(x,\, y)\Big|_{z=z^0(x,\,y)}$, *функция* $z = z^0(x,\, y)$ — *решение задачи* (3.1)–(3.2) *при оптимальном управлении* $\omega = \omega^0$, *а функции* $\psi = \psi^0$, $\phi = \phi^0$, $\chi = \chi^0$ — *решение системы* (3.5)–(3.8) *при оптимальном* $\omega = \omega^0$.

Доказательство. Доказательство основывается на следующем равенстве:

$$\iint\limits_{\Pi} \sum_{i=1}^n \psi_i \bigl[z_{ixy} - f_i(x,\, y,\, p,\, u)\bigr]\, dx\, dy +$$

$$+ \int\limits_0^X \sum_{i=1}^n \phi_i \bigl[z_{ix}(x,0) - f_i^1(x,\, z(x,0),\, v)\bigr]\, dx +$$

$$+ \int\limits_0^Y \sum_{i=1}^n \chi_i \bigl[z_{iy}(0,y) - f_i^2(y,\, z(0,y),\, w)\bigr]\, dy = 0,$$

которое справедливо для каждого решения z краевой задачи (3.1)–(3.2). Его можно представить в виде

[1] Здесь приращения функций берутся по указанной в Δ переменной.

$$\iint\limits_{\Pi}\Big[\sum_{i=1}^{n}\psi_i z_{ixy}-H(x,\,y,\,\psi,p,\,u)\Big]\,dx\,dy+$$
$$+\int\limits_{0}^{X}\Big[\sum_{i=1}^{n}\phi_i z_{ix}(x,0)-h^1(x,\,\phi,\,z(x,0),\,v)\Big]\,dx+$$
$$+\int\limits_{0}^{Y}\Big[\sum_{i=1}^{n}\chi_i z_{iy}(0,y)-h^2(y,\,\chi,\,z(0,y),\,w)\Big]\,dy=0. \quad (3.12)$$

Пусть ω^0 — оптимальное управление и z^0 — соответствующее ему решение задачи (3.1)–(3.2), а ψ^0, ϕ^0, χ^0 — соответствующее ему решение задачи (3.5)–(3.8).

Пусть, далее, $\Delta\omega$ — допустимое приращение управления ω^0. Это означает, что управление $\omega^0+\Delta\omega$ принимает значения в $G\times G_1\times G_2$ и функция $\Delta\omega$ такова, что задача (3.1)–(3.2) на управлении $\omega=\omega^0+\Delta\omega$ имеет единственное решение. Его обозначим $z^0+\Delta z$. Соответствующий этому решению вектор p обозначим $p^0+\Delta p$. Очевидно, что для приращения $\Delta z=\big\{\Delta z_1,\,\ldots,\,\Delta z_n\big\}$ справедливы следующие тождества $\big($см. (3.1)–(3.2)$\big)$:

$$\Delta z_{ixy}=f_i(x,\,y,\,p^0+\Delta p,\,u^0+\Delta u)-$$
$$-f_i(x,\,y,\,p^0,\,u^0),\qquad (x,\,y)\in\Pi; \quad (3.13)$$

$$\Delta z_{ix}(x,\,0)=f_i^1(x,\,z^0(x,0)+\Delta z(x,0),\,v^0+\Delta v)-$$
$$-f_i^1(x,\,z^0(x,0),\,v^0),\qquad 0\leqslant x\leqslant X; \quad (3.14)$$

$$\Delta z_{iy}(0,\,y)=f_i^2(y,\,z^0(0,y)+\Delta z(0,y)\,w^0+\Delta w)-$$
$$-f_i^2(y,\,z^0(0,y),\,w^0),\qquad 0\leqslant y\leqslant Y; \quad (3.15)$$

$$\Delta z_i(0,0)=0,\qquad i=1,\,\ldots,\,n. \quad (3.16)$$

Так же как и в стандартной задаче, сначала вычислим приращение функционала S на решении краевой задачи

(3.13)–(3.16), т. е. вычислим величину

$$\Delta S=\sum_{i=1}^{n}\left[c_i\,\Delta z_i(X,\,Y)+c_i^1\,\Delta z_i(X,\,0)+c_i^2\,\Delta z_i(0,\,Y)\right]. \quad (3.17)$$

В соответствии с равенством (3.12) справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Pi}\Big[\sum_{i=1}^{n}\psi_i\Delta z_{ixy}-\Delta H(x,\,y,\,\psi,\,p^0,\,u^0)\Big]\,dx\,dy+$$
$$+\int\limits_0^X\Big[\sum_{i=1}^{n}\phi_i\Delta z_{ix}(x,\,0)-\Delta h^1(x,\,\phi,\,z^0(x,0),v^0)\Big]\,dx+$$
$$+\int\limits_0^Y\Big[\sum_{i=1}^{n}\chi_i\Delta z_{iy}(0,y)-\Delta h^2(y,\chi,z^0(0,y),w^0)\Big]dy=0 \quad (3.18)$$

при произвольных вектор-функциях ψ, ϕ, χ. Здесь введены следующие обозначения: $\Delta H(x,\,y,\,\psi,\,p^0,\,u^0)$ — приращение функции H, соответствующее приращениям аргументов Δp и Δu; $\Delta h^1(x,\,\phi,\,z^0(x,0),v^0)$ — приращение функции h^1, соответствующее приращениям аргументов $\Delta z(x,\,0)$ и Δv и, наконец, $\Delta h^2(y,\,\chi,\,z^0(0,y),\,w^0)$ — приращение функции h^2, соответствующее приращениям аргументов $\Delta z(0,\,y)$ и Δw.

Скалярное произведение векторов $a=\{a_1,\,\ldots,\,a_n\}$ и $b=\{b_1,\,\ldots,\,b_n\}$ будем обозначать через $\langle a,\,b\rangle$, а через a_x и a_y будем обозначать векторы $\{a_{1x},\ldots,a_{nx}\}$ и $\{a_{1y},\ldots,a_{ny}\}$ соответственно.

Преобразуем интегралы от первых слагаемых в подынтегральных выражениях равенства (3.18):

$$\iint\limits_{\Pi}\langle\psi,\Delta z_{xy}\rangle\;dx\,dy=$$
$$=\int\limits_0^X\langle\psi,\Delta z_x\rangle\Big|_{y=0}^{Y}dx-\iint\limits_{\Pi}\;\langle\psi_y,\Delta z_x\rangle\;dx\,dy=$$

$$= \Big[\langle\psi, \Delta z\rangle\Big|_{y=0}^{Y}\Big]\Big|_{x=0}^{X} - \Big[\int\limits_0^X \langle\psi_x, \Delta z\rangle\Big|_{y=0}^{Y} dx +$$

$$+ \int\limits_0^Y \langle\psi_y, \Delta z\rangle\Big|_{x=0}^{X} dy\Big] + \iint\limits_{\Pi} \langle\psi_{xy}, \Delta z\rangle\, dx\, dy. \qquad (3.19)$$

Аналогично получаем, учитывая условие (3.16):

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^X \langle\phi,\, \Delta z_x(x,\, 0)\rangle\, dx = \\ &\qquad = \big\langle\phi(X), \Delta z(X,\, 0)\big\rangle - \int\limits_0^X \big\langle\phi',\, \Delta z(x,\, 0)\big\rangle\, dx; \\ &\int\limits_0^Y \langle\chi(y), \Delta z_y(0,\, y)\rangle\, dy = \\ &\qquad = \big\langle\chi(Y), \Delta z(0,\, Y)\big\rangle - \int\limits_0^Y \big\langle\chi',\, \Delta z(0,\, y)\big\rangle\, dy. \end{aligned} \qquad (3.20)$$

Преобразуем теперь слагаемые в (3.18), содержащие H, h^1 и h^2.

$$\iint\limits_{\Pi}\Big[H(x,y,\psi,p^0+\Delta p, u^0+\Delta u) - H(x,y,\psi,p^0,u^0)\Big]dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Pi} \Delta_u H(x,\, y,\, \psi, p^0,\, u^0)\, dx\, dy +$$

$$+ \iint\limits_{\Pi} \Delta_p H(x,\, y,\, \psi, p^0,\, u^0)\, dx\, dy + R. \qquad (3.21)$$

Здесь[2]

[2]Обозначения $\Delta_u H$ и $\Delta_p H$ — приращения функции H по переменной u и p соответственно.

$$R = \iint\limits_{\Pi} \Big[\Delta_u H(x, y, \psi, p^0 + \Delta p, u^0) - \\ - \Delta_u H(x, y, \psi, p^0, u^0)\Big]\, dxdy. \quad (3.22)$$

Аналогично находим

$$\int\limits_0^X \Delta h^1(x, \phi, z^0(x, 0), v^0)\, dx = \int\limits_0^X \big[\Delta_z h^1(x, \phi, z^0(x, 0), v^0) + \\ + \Delta_v h^1(x, \phi, z^0(x, 0), v^0)\big]\, dx + R^1; \quad (3.23)$$

$$\int\limits_0^Y \Delta h^2(x, \chi, z^0(0, y), w^0)\, dy = \int\limits_0^Y \big[\Delta_z h^2(y, \chi, z^0(0, y), w^0) + \\ + \Delta_w h^2(y, \chi, z^0(0, y), w^0)\big]\, dy + R^2, \quad (3.24)$$

где использованы следующие обозначения[3]:

$$\begin{aligned} R^1 &= \int\limits_0^X \big[\Delta_v h^1(x, \phi, z^0 + \Delta z, v^0) - \\ &\qquad - \Delta_v h^1(x, \phi, z^0, v^0)\big]\, dx; \\ R^2 &= \int\limits_0^Y \big[\Delta_w h^2(y, \chi, z^0 + \Delta z, w^0) - \\ &\qquad - \Delta_w h^2(y, \chi, z^0, w^0)\big]\, dy. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Из формулы Тейлора и интегрирования по частям получаем

$$\iint\limits_{\Pi} \Delta_p H(x,\, y,\, \psi, p^0,\, u^0)\, dx\, dy =$$

[3]Обозначение $\Delta_z h^i$ — приращение функции h^i по переменной z для $i = 1,\, 2$; обозначения $\Delta_v h^1$ и $\Delta_w h^2$ — приращения функций h^1 и h^2 по переменным v и w соответственно.

$$
= \sum_{i=1}^{n} \Bigg\{ \iint\limits_{\Pi} \Big[\frac{\partial H}{\partial z_i} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial H}{\partial z_{ix}}\Big) - \frac{d}{dy}\Big(\frac{\partial H}{\partial z_{iy}}\Big) \Big] \Delta z_i \, dx\, dy +
$$

$$
+ \int\limits_0^Y \Big[\frac{\partial H}{\partial z_{ix}} \Delta z_i \Big] \Bigg|_{x=0}^{X} dy + \int\limits_0^X \Big[\frac{\partial H}{\partial z_{iy}} \Delta z_i \Big] \Bigg|_{y=0}^{Y} dx \Bigg\} + R_1, \quad (3.26)
$$

где для $0 < \theta < 1$

$$
R_1 = \frac{1}{2} \iint\limits_{\Pi} \sum_{i,j=1}^{3n} \frac{\partial^2 H(x, y, \psi, p+\theta\Delta p, u)}{\partial p_i \, \partial p_j} \Delta p_i \Delta p_j dx dy. \quad (3.27)
$$

Используя формулы (3.19), (3.21), (3.26), условие (3.16), первый интеграл в формуле (3.18) можно представить в следующем виде[4]:

$$
\iint\limits_{\Pi} \Big[\sum_{i=1}^{n} \psi_i \Delta z_{ixy} - \Delta H(x,\, y,\, \psi,\, p^0,\, u^0) \Big] dx\, dy =
$$

$$
= \langle \psi,\, \Delta z \rangle_{(X,\, Y)} - \langle \psi,\, \Delta z \rangle_{(X,\, 0)} - \langle \psi,\, \Delta z \rangle_{(0,\, Y)} -
$$

$$
- \Bigg[\int\limits_0^X \Big\langle \psi_x + \frac{\partial H}{\partial z_y}, \Delta z \Big\rangle \Bigg|_{y=0}^{Y} dx + \int\limits_0^Y \Big\langle \psi_y + \frac{\partial H}{\partial z_x}, \Delta z \Big\rangle \Bigg|_{x=0}^{X} dy \Bigg] +
$$

$$
+ \iint\limits_{\Pi} \sum_{i=1}^{n} \Bigg[\psi_{ixy} - \frac{\partial H}{\partial z_i} + \frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial z_{ix}} + \frac{d}{dy} \frac{\partial H}{\partial z_{iy}} \Bigg] \Delta z_i \, dx\, dy -
$$

$$
- \iint\limits_{\Pi} \Delta_u H(x,\, y,\, \psi,\, p^0,\, u^0)\, dx\, dy - R - R_1.
$$

Учитывая, что функции ψ_i удовлетворяют уравнениям (3.5), (3.6) и условиям (3.7), полученное равенство можно переписать

[4] Здесь выражение $\langle \cdot,\, \cdot \rangle_{(X,Y)}$ означает, что значение скалярного произведения берется в точке с координатами $(X,\, Y)$ и т. п.

$$\iint\limits_{\Pi} \Big[\sum_{i=1}^{n} \psi_i \Delta z_{ixy} - \Delta H(x,\, y,\, \psi,\, p^0,\, u^0)\Big]\, dx\, dy =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} c_i \Delta z_i(X,\, Y) - \langle \psi,\, \Delta z\rangle_{(X,\,0)} - \langle \psi,\, \Delta z\rangle_{(0,\,Y)} +$$

$$+ \int\limits_0^X \Big\langle \psi_x + \frac{\partial H}{\partial z_y}, \Delta z \Big\rangle_{(x,\,0)} dx + \int\limits_0^Y \Big\langle \psi_y + \frac{\partial H}{\partial z_x}, \Delta z \Big\rangle_{(0,\,y)} dy -$$

$$- \iint\limits_{\Pi} \Delta_u H(x,\, y,\, \psi,\, p^0,\, u^0)\, dx\, dy - R - R_1. \qquad (3.28)$$

Аналогично преобразуем два оставшихся интеграла в равенстве (3.18). Находим, используя выражения (3.23) и (3.24):

$$\int\limits_0^X \Delta h^1(x,\, \phi,\, z^0(x,0),\, v^0)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^X \Big[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h^1}{\partial z_i} + \Delta_v h^1(x,\, \phi,\, z^0(x,0),\, v^0)\Big]\, dx +$$

$$+ R^1 + R_1^1, \qquad (3.29)$$

$$\int\limits_0^Y \Delta h^2(y,\, \chi,\, z^0(0,y),\, w^0)\big]\, dy =$$

$$= \int\limits_0^Y \Big[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h^2}{\partial z_i} + \Delta_w h^2(y,\, \chi,\, z^0(0,y),\, w^0)\Big]\, dy +$$

$$+ R^2 + R_1^2. \qquad (3.30)$$

В выражениях (3.29) и (3.30) использованы для $0 < \theta_1 < 1$ и $0 < \theta_2 < 1$ следующие обозначения:

$$R_1^1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^X \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 h^1}{\partial z_i\,\partial z_j}\,(x,\,\phi,\,z^0 + \theta_1\Delta z,\,v^0)\,\Delta z_i\,\Delta z_j\,dx, \quad (3.31)$$

здесь $z_i^0 = z_i^0(x,\,0)$ и $\Delta z_i = \Delta z_i(x,\,0)$,

$$R_1^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^Y \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 h^2}{\partial z_i\,\partial z_j}(y,\,\chi,\,z^0 + \theta_2\Delta z,\,w^0)\,\Delta z_i\,\Delta z_j\,dy, \quad (3.32)$$

где обозначено $z_i^0 = z_i^0(0,\,y)$ и $\Delta z_i = \Delta z_i(0,\,y)$.

Преобразуем второе и третье слагаемые в равенстве (3.18), используя выражения (3.20), (3.29) и (3.30).

$$\int\limits_0^X \Big[\langle \phi,\,\Delta z_x(x,\,0)\rangle - \Delta h^1(x,\,\phi,\,z^0(x,\,0),\,\boldsymbol{v}^0\Big]\,dx =$$

$$= \langle \phi(X),\,\Delta z(X,\,0)\rangle - \int\limits_0^X \Big[\Big\langle \phi' + \frac{\partial h^1}{\partial z},\,\Delta z(x,\,0)\Big\rangle +$$

$$+ \Delta_v h^1(x,\,\phi,\,z^0(x,\,0),\,v^0)\Big]\,dx - R^1 - R_1^1; \quad (3.33)$$

$$\int\limits_0^Y \Big[\langle \chi,\,\Delta z_y(0,\,y)\rangle - \Delta h^2(y,\,\chi,\,z^0(0,\,y),\,w^0\Big]\,dy =$$

$$= \langle \chi(Y),\,\Delta z(0,\,Y)\rangle - \int\limits_0^Y \Big[\Big\langle \chi' + \frac{\partial h^2}{\partial z},\,\Delta z(0,\,y)\Big\rangle +$$

$$+ \Delta_w h^2(x,\,\chi,\,z^0(0,\,y),w^0)\Big]\,dy - R^2 - R_1^2. \quad (3.34)$$

В (3.28), (3.33) и (3.34) подставим $\psi = \psi^0$, $\phi = \phi^0$ и $\chi = \chi^0$ соответственно. Полученные формулы используем в (3.18):

$$
-\sum_{i=1}^{n} c_i \Delta z(X, Y) - \left\langle \psi^0(X, 0) - \phi^0(X), \Delta z(X, 0) \right\rangle -
$$

$$
- \left\langle \psi^0(0, Y) - \chi^0(Y), \Delta z(0, Y) \right\rangle +
$$

$$
+ \int\limits_0^X \left\langle \psi_x(x, 0) + \frac{\partial H}{\partial z_y}\Big|_{y=0} - (\phi^0)' - \frac{\partial h^1}{\partial z}, \Delta z(x, 0) \right\rangle dx -
$$

$$
- \int\limits_0^Y \left\langle \psi_y(0, y) + \frac{\partial H}{\partial z_x}\Big|_{x=0} - (\chi^0)' - \frac{\partial h^2}{\partial z}, \Delta z(0, y) \right\rangle dy -
$$

$$
-\iint\limits_{\Pi} \Delta_u H(x, y, \psi^0, p^0, u^0) dx dy - \int\limits_0^X \Delta_v h^1(x, \phi^0, \Delta z(x, 0), v^0) dx -
$$

$$
- \int\limits_0^Y \Delta_w h^2(y, \chi^0, \Delta z(0, y), w^0)\, dx - \Phi = 0. \qquad (3.35)
$$

Здесь

$$
\Phi = R + R_1 + R^1 + R^1_1 + R^2 + R^2_1. \qquad (3.36)
$$

Тогда с учетом уравнений (3.5)–(3.8) и выражения (3.17) равенство (3.35) можно представить в виде

$$
\Delta S = -\iint\limits_{\Pi} \Delta_u H(x, y, \psi^0, p^0, u^0)\, dx\, dy -
$$

$$
- \int\limits_0^X \Delta_v h^1(x, \phi^0, \Delta z(x, 0), v^0)\, dx -
$$

$$
- \int\limits_0^Y \Delta_w h^2(y, \chi^0, \Delta z(0, y), w^0)\, dx - \Phi. \qquad (3.37)
$$

В работе [**61**] показано, что при малых в соответствующих метриках (см. (3.3)) приращениях Δu, Δv и Δw знак приращения ΔS определяется первыми тремя слагаемыми в правой части формулы (3.37). Из этого следует, что условия (3.9)–(3.11) в принципе максимума действительно являются необходимыми условиями оптимальности.

3.3. Управление линейной системой. Рассмотрим теперь случай, когда уравнения (3.1)–(3.2) являются линейными. В этом случае их можно записать в следующем виде:

$$z_{ixy} = \sum_{k=1}^{n} \big[a_{ik}(x,\,y) z_{kx} + b_{ik}(x,\,y) z_{ky} + c_{ik}(x,\,y) z_k\big] + \\ + \sum_{j=1}^{r} d_{ij}(x,\,y) u_j + f_i(x,\,y); \quad (3.38)$$

$$\begin{gathered} z_{ix}(x,\,0) = \sum_{k=1}^{n} a^1_{ik}(x) z_k(x,\,0) + \sum_{\nu=1}^{s} d^1_{i\nu}(x) v_\nu + f^1_i(x), \\ z_{iy}(0,\,y) = \sum_{k=1}^{n} a^2_{ik}(y) z_k(0,\,y) + \sum_{\mu=1}^{t} d^2_{i\mu}(y) w_\mu + f^2_i(y), \\ z_i(0,\,0) = 0, \qquad i = 1,\,\ldots,\,n. \end{gathered} \quad (3.39)$$

Будем предполагать, что все заданные функции в системе (3.38)–(3.39) непрерывны.

Выпишем соответствующие функции H, h^1 и h^2:

$$H(x,y,\psi,p,u) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \Big[\sum_{k=1}^{n} \big[a_{ik}(x,\,y) z_{kx} + b_{ik}(x,\,y) z_{ky} + \\ + c_{ik}(x,\,y) z_k\big] + \sum_{j=1}^{r} d_{ij}(x,\,y) u_j + f_i(x,\,y)\Big],$$

$$h^1(x,\phi,z,v) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \Big[\sum_{k=1}^{n} a^1_{ik}(x) z_k(x,\,0) + \sum_{\nu=1}^{s} d^1_{i\nu}(x) v_\nu + f^1_i(x)\Big],$$

$$h^2(y,\chi,z,w) = \sum_{i=1}^{n} \chi_i \Big[\sum_{k=1}^{n} a^2_{ik}(y) z_k(0,\,y) + \sum_{\nu=1}^{t} d^2_{i\nu}(y) w_\nu + f^2_i(y)\Big].$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что в этом случае выражение Φ, определяемое формулой

(3.36), а также (3.22), (3.25), (3.27), (3.31) и (3.32), равно нулю. Поэтому формула (3.37) принимает вид

$$\Delta S = -\iint\limits_{\Pi} \Delta_u H(x,\, y,\, \psi^0,\, p^0,\, u^0)\, dx\, dy - \\ - \int\limits_0^X \Delta_v h^1(x,\, \phi^0,\, \Delta z(x,\, 0),\, v^0)\, dx - \\ - \int\limits_0^Y \Delta_w h^2(y,\, \chi^0,\, \Delta z(0,\, y),\, w^0)\, dx.$$

Отсюда следует, что для линейной системы необходимые условия оптимальности являются и достаточными.

Пример 3.1. Рассмотрим следующий управляемый процесс:

$$z_{xy}(x,\, y) = -2z(x,\, y) + 2z_y(x,\, y) + z_x(x,\, y) + u(x,\, y), \\ 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2; \\ z_x(x,\, 0) = 2z(x,\, 0) + v(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ z_y(0,\, y) = 4z(0,\, y) + w(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2; \\ z(0,\, 0) = 0.$$

Здесь допустимые управления $\omega = \{u(x,\, y), v(x), w(y)\}$ — векторные функции, компоненты которых кусочно непрерывны и удовлетворяют условиям:

$$0 \leqslant u(x,\, y) \leqslant 2, \qquad |v(x)| \leqslant 1, \qquad |w(y)| \leqslant 2.$$

Критерием оптимальности является следующий функционал:

$$S[z] = -8z(1,\, 2) + z(1,\, 0) - 4z(0,\, 2).$$

Требуется найти такие управления $\omega = \omega(x, y)$, при которых функционал S достигал бы наибольшего значения.

В соответствии с принципом максимума строим функции:

$$H = \psi(x,\, y)\big[-2z(x,\, y) + 2z_y(x,\, y) + z_x(x,\, y) + u(x,\, y)\big];$$

$$h^1 = \phi(x)\big[2z(x,\, 0) + v(x)\big]; \quad h^2 = \chi(y)\big[4z(0,\, y) + w(y)\big].$$

Функции $\psi = \psi(x,\, y)$, $\phi = \phi(x)$ и $\chi = \chi(y)$ определим как решения следующих задач.

$$\begin{aligned} &\psi_{xy}(x,\, y) = -2\psi(x,\, y) - \psi_x(x,\, y) - 2\psi_y(x,\, y), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2; \\ &\psi_x(x,\, 2) + 2\psi(x,\, 2) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ &\psi_y(1,\, y) + \psi(1,\, y) = 0, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2; \\ &\psi(1,\, 2) = 8. \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned} &\phi'(x) + 2\phi(x) = \psi_x(x,\, 0) + 2\psi(x,\, 0), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ &\phi(1) - \psi(1,0) = -1. \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned} &\chi'(y) + 4\chi(y) = \psi_y(0,\, y) + \psi(0,\, y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2; \\ &\chi(2) - \psi(0,\, 2) = 4. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Решением задачи (3.40) является функция (см. пример 2.3)

$$\psi(x,\, y) = 8e^{-2(x-1)} \cdot e^{-(y-2)}. \tag{3.43}$$

Тогда решения задач (3.41) и (3.42), с учетом найденного решения (3.43), имеют следующий вид:

$$\phi(x) = (8e^2 - 1)e^{-2(x-1)}; \quad \chi(y) = 4(1 + 2e^2)e^{-4(y-2)}.$$

Обозначим z^0, ψ^0, ϕ^0, χ^0 — решения соответствующих задач при оптимальном управлении ω^0. Условие

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^2 \big[H(x,y,\psi^0,z^0,u^0+\Delta u) - H(x,y,\psi^0,z^0,u^0)\big]\,dx\,dy \geqslant 0$$

представим в виде $\displaystyle\int\limits_0^1 \int\limits_0^2 \psi\{[u^0+\Delta u)] - u^0\}\,dx\,dy \geqslant 0$. Оно означает, что $\displaystyle\int\limits_0^1 \int\limits_0^2 \psi(x,y)u^0(x,y)\,dx\,dy = \min$. Это условие выполняется только при $u^0(x,\, y) \equiv 0$, поскольку $\psi > 0$ для всех $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 2$. Далее аналогично находим, что условия:

$$\int_0^1 \big[h^1(x,\phi^0,z^0(x,0),v+\Delta v)-h^1(x,\phi^0,z^0(x,0),v)\big]\,dx \geqslant 0;$$

$$\int_0^2 \big[h^2(y,\chi^0,z^0(0,y),w+\Delta w)-h^2(y,\chi^0,z^0(0,y),w)\big]\,dx \geqslant 0,$$

можно представить в виде:

$$\int_0^1 \phi(x)\{[v^0(x)+\Delta v(x)]-v^0(x)\}\,dx \geqslant 0,$$

$$\int_0^2 \chi(y)\{[w^0(y)+\Delta w(y)]-w^0(y)\}\,dy \geqslant 0.$$

Следовательно, оптимальные $v^0(x)$ и $w^0(y)$ определяются соотношениями:

$$\int_0^1 \phi(x)v^0(x)\,dx=\min, \qquad \int_0^2 \chi(y)w^0(y)\,dy=\min.$$

Функции $\phi=\phi(x)$ и $\chi=\chi(y)$ положительны. Поэтому оптимальными являются $v^0(x)\equiv -1$, $w^0(y)\equiv -2$. Находим $\omega^0=\{0,\,-1\,-2\}$.

Глава 3

Линейно-квадратичные задачи управления

В этой главе рассматриваются задачи оптимального управления процессом теплопроводности, когда уравнения и граничные условия линейны, а критерием оптимальности служит линейный функционал. При этом функция управления входит в граничные условия. Такого типа задачи наиболее интересны в теоретическом плане (получаются наиболее содержательные научные результаты). С прикладной точки зрения такие задачи отражают наиболее распространенные способы управления тепловыми процессами.

1. Постановки краевых задач

1.1. Стационарный тепловой процесс. Будем рассматривать процесс распространения тепла внутри области $G \subset \mathbb{R}^3$ под воздействием внутренних источников тепла (например, за счет химических реакций внутри G) и под воздействием температурных процессов, протекающих на границе G.

Внутри области определяем изотермическую поверхность Σ. Пусть $j(M)$ — *плотность теплового потока* в окрестности точки $M \in \Sigma$ (количество тепла, протекающего через единичную площадь поверхности Σ в единицу времени). Согласно *закону Фурье*, справедливо равенство

$$j(M) = -k(M)\,\mathrm{grad}\,u, \tag{1.1}$$

где $k(M) > 0$ — коэффициент теплопроводности, $u = u(x)$ — температура в точке x, $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$. Напомним, что вектор $\mathrm{grad}\,u$ направлен в сторону наибольшего возрастания температуры u.

Предположим, что взаимодействие с внешней средой подчинено закону Ньютона. Если q — количество тепла, протекающего через единичную площадь граничной поверхности за единицу времени, то справедливо следующее равенство: $q = \alpha\big[u(x) - p(x)\big]$, здесь α — коэффициент теплообмена, u — температура тела G вблизи границы, а p — температура внешней среды.

Обозначим $f = f(x)$ — плотность внутренних источников тепла — это количество тепла, выделяемого внутренними источниками в окрестности точки x единичного объема за единицу времени.

Будем составлять уравнение теплового баланса. Выделим произвольно малую окрестность ω некоторой точки $M \in G$ и S_ω — граница окрестности ω. Поскольку

$$-\iint\limits_{S_\omega} \big(k \operatorname{grad} u,\, dS\big) = -\iiint\limits_{\omega} \operatorname{div}\big(\, k \operatorname{grad} u\big)\, d\omega,$$

то уравнение теплового баланса для окрестности ω имеет следующий вид:

$$-\iiint\limits_{\omega} \operatorname{div}\big(\, k \operatorname{grad} u\big)\, d\omega = \iiint\limits_{\omega} f\, d\omega.$$

Так как область ω произвольна, то уравнение теплового баланса в каждой точке области G можно представить в виде

$$\operatorname{div}\big(\, k \operatorname{grad} u\big) + f = 0$$

или в декартовых координатах:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[k\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[k\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\right] + \frac{\partial}{\partial x_3}\left[k\,\frac{\partial u}{\partial x_3}\right] + f = 0. \qquad (1.2)$$

Вблизи границы ∂G для любой точки $x \in \partial G$ выполняется граничное условие (согласно закону Ньютона):

$$-k \operatorname{grad} u = \alpha[\, u - p\,].$$

1.2. Нестационарный тепловой процесс. В случае, когда тепловой процесс не является стационарным, следует учитывать закон, по которому определяется количество тепла q_1, приобретаемое телом единичного объема за единицу времени с переходом от температуры u_1 к температуре u_2. Это количество тепла определяется по следующей формуле: $q_1 = c\rho\bigl(u_2 - u_1\bigr)$, где c — теплоемкость тела, а ρ — его плотность. Таким образом, количество тепла Δq, приобретаемое телом за промежуток времени Δt, можно вычислить следующим образом: $\Delta q = c\rho\,\dfrac{\partial u}{\partial t}\,\Delta t$.

Приходим к краевой задаче, которая описывает рассматриваемый нестационарный процесс. Уравнение состояния поля имеет вид при $x \in G$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[k(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[k(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\right] + \frac{\partial}{\partial x_3}\left[k(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_3}\right] + {} \\ + f(t,x) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1.3)$$

При этом должно выполняться граничное условие:

$$-k\,\mathrm{grad}\,u = \alpha[u - p], \qquad x \in \partial G, \quad (1.4)$$

и начальное условие:

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in \overline{G}. \quad (1.5)$$

Замечание 1.1. Отметим, что функция φ, которая фигурирует в уравнении (1.5), не является произвольной. Она либо связана с уравнением (1.3) (это состояние определилось тепловым процессом при $t < 0$), либо с уравнением, определяющим стационарное состояние поля (1.2).

1.3. Тепловой процесс в тонком стержне. Имеется тонкий однородный стержень длиной ℓ. Величины ρ, c, k постоянны и $a^2 = k/(c\rho)$. Тогда уравнение состояния поля принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\,x) = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\,x) + f(t,\,x), \quad 0 < x < \ell,\ t > 0. \quad (1.6)$$

Далее предположим, что левый конец стержня теплоизолирован, тогда тепловой поток через этот конец равен нулю и из (1.1) следует

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,\,0) = 0, \qquad t \geqslant 0. \quad (1.7)$$

Справа к стержню примыкает среда, температура ее равна $p = p(t)$. Тогда в соответствии с граничным условием (1.4) получаем

$$\frac{\partial u(t,\,\ell)}{\partial x} + \alpha\big[u(t,\,\ell) - p(t)\big] = 0, \qquad t \geqslant 0. \tag{1.8}$$

Начальное условие имеет следующий вид:

$$u(0,\,x) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell. \tag{1.9}$$

Существует несколько возможностей управления тепловым процессом (1.6)–(1.9):

а) можно управлять изменением температуры внешней среды p, влияя тем самым на тепловое поле в стержне через правый его конец;

б) можно расположить вдоль стержня тепловые источники, например протянуть провод с мощным током. Тогда можно изменять температуру стержня, изменяя во времени силу тока. Математически это характеризуется тем, что функция f в уравнении может быть представлена в виде $f(t,\,x) = g(x)\cdot r(t)$, где функция $g(x)$ определяется распределением источников тепла, а $r(t)$ — изменением их мощности. Каждую из этих функций можно рассматривать как управление.

Замечание 1.2. Состояние процесса в каждый момент времени характеризуется только одной функцией u — решением краевой задачи (1.6)–(1.9).

Если зафиксировать момент времени t_1, то состояние системы $u(t_1,\,x) = \varphi_1(x)$ будет определять дальнейший процесс при $t > t_1$ в соответствии с заданной краевой задачей (1.6)–(1.8) и начальным условием вида $u(t_1, x) = \varphi_1(x)$.

1.4. Описание других процессов. Рассмотрим аналогичный тепловому диффузионный процесс. Пусть в некоторой области G содержится раствор некоторого вещества. Его концентрацию обозначим через $u(x)$. Это означает, что $u(x)$ — количество растворенного вещества в единичном объеме в окрестности точки x. Через S обозначим поверхность равной его концентрации, проходящей через точку $M(x)$. Пусть $j(M)$ — *плотность его потока* — количество вещества, проходящего через элемент поверхность S единичной площади за единицу времени, здесь $M \in G$. Согласно *закону Фика* $j(M) = -k(M)\operatorname{grad} u$, где u — концентрация вещества. Массообмен на границе описывается законом Ньютона:

$$q(t,\, x) = \alpha[u - p],$$

где $q(t,\, x)$ — количество вещества, проходящего в единицу времени через единичную площадку поверхности, примыкающей к границе S; u — количество вещества среды внутри G вблизи границы, p — количество того же вещества внешней среды вблизи S, а α — *коэффициент массообмена.*

Таким образом, для описания плоского диффузионного процесса (поверхности равной концентрации являются плоскостями) аналогичным образом получаем краевую задачу (1.6)–(1.9).

Можно описать более сложные процессы, например взаимосвязанные тепловой и диффузионный процессы. К таким процессам относится сушка влажного материала [**164**], [**247**] или процессы распространения нейтронов в ядерном реакторе [**44**] с учетом тепловых процессов в нем.

Рассмотрим, например, процесс сушки влажного материала. Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$, $u = u(t,\, x)$ — температура, а $v = v(t,\, x)$ — количество воды (пара) в единице объема области G в окрестности точки x в момент времени t. Если процессы стационарны, то в рассматриваемой области G можно указать изотермическую поверхность $u = C$ и поверхность равной концентрации $v = C_1$. Эти поверхности не обязаны совпадать. Пусть $j_1(M)$ — плотность теплового потока через изотермическую поверхность, тогда для описания процесса используется закон:

$$j_1(M) = -k_{11}(M)\operatorname{grad} u - k_{12}(M)\operatorname{grad} v.$$

Далее, пусть $j_2(M)$ — аналогичная плотность потока вещества. Тогда

$$j_2(M) = -k_{21}(M)\operatorname{grad} u - k_{22}(M)\operatorname{grad} v.$$

Выполняя изложенные выше рассуждения, получим систему дифференциальных уравнений. Аналогично можно описывать процессы тепло- и массопереноса в бинарных газовых смесях и жидких растворах (см., например, [**66**], с. 62–74). При описании таких процессов наибольшие трудности представляет учет граничных условий.

Тем не менее получаемые краевые задачи обычно решаются методом Фурье. Поэтому излагаемые ниже методы решения задач оптимального управления можно использовать и для исследования соответствующих задач, в которых рассматриваются процессы, описываемые системами уравнений указанного типа.

Отметим, что для для описания нестационарного процесса в ядерном реакторе приходится использовать интегро-дифференциальные уравнения. Это обусловлено тем, что этот процесс осложняется появлением запаздывающих нейтронов (см., например, [**44**], [**66**]).

2. Решение краевых задач методом Фурье и обобщенные решения

2.1. Метод Фурье. Пусть процесс распространения тепла описывается краевой задачей (1.6)–(1.9). Ее решение будем искать в следующем виде: $u(t, x) = T(t) \cdot X(x)$. Эту функцию подставим в уравнение (1.6), в котором полагаем $f(t, x) \equiv 0$. Тогда

$$\frac{1}{a^2}\,\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Сначала предположим, что граничное условие (1.8) однородно, т. е. будем считать, что $p(t) \equiv 0$. Тогда однородные граничные условия (1.7) и (1.8) приводят к следующей задаче Штурма–Лиувилля:

$$\begin{aligned} &X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < \ell; \\ &X'(0) = 0, \quad X'(\ell) + \alpha X(\ell) = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Общее решение уравнения задачи (2.1) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

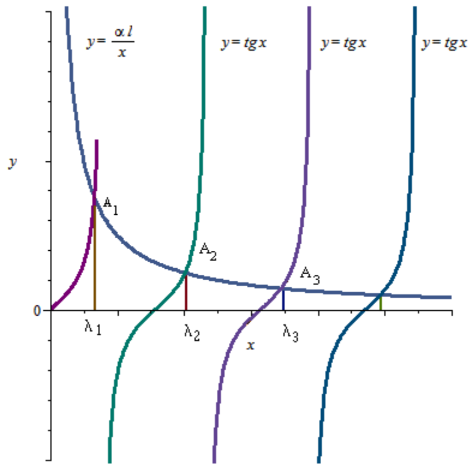

Рис. 3.2.1

Первое граничное условие дает $C_2 = 0$, а второе граничное условие, в силу нетривиальности решения X, дает уравнение $\lambda \sin \lambda\ell = \alpha \cos \lambda\ell$. Корни полученного уравнения найдем графически: положим $\lambda\ell = x$. Следовательно, абсциссы λ_n точек пересечения A_n графиков $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \dfrac{\alpha\ell}{x}$ и дают нам требуемые корни уравнения (см. рис. 3.2.1). Последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ обладает следующим свойством:

$$\frac{\lambda_n \ell}{(n-1)\pi} \to 1 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{2.2}$$

Каждому полученному значению λ_n соответствует функция X_n вида $X_n = C_n \cos \lambda_n x$, где постоянная C_n выбрана таким образом, чтобы $\int\limits_0^\ell X_n^2(x)\,dx = 1$.

Покажем, что для полученной системы функций выполняется равенство $\int\limits_0^\ell X_n(x) X_m(x)\,dx = 0$ при $n \neq m$. Из уравнения (2.1) следует

$$-\lambda_m^2 \int_0^\ell X_n(x)X_m(x)\,dx = X_n(\ell)X'_m(\ell) - \int_0^\ell X'_n(x)X'_m(x)\,dx.$$

С другой стороны,

$$-\lambda_n^2 \int_0^\ell X_n(x)X_m(x)\,dx = X'_n(\ell)X_m(\ell) - \int_0^\ell X'_n(x)X'_m(x)\,dx.$$

Таким образом, из граничных условий задачи (2.1) следует

$$\left(\lambda_n^2 - \lambda_m^2\right) \int_0^\ell X_n(x)X_m(x)\,dx =$$

$$= X_n(\ell)\left[X'_m(\ell) + \alpha X_m(\ell)\right] - X_m(\ell)\left[X'_n(\ell) + \alpha X_n(\ell)\right] = 0.$$

Поскольку $\lambda_n \neq \lambda_n$ при $n \neq m$, то $\displaystyle\int_0^\ell X_n(x)X_m(x)\,dx = 0$.

Полученная система функций $\{X_n(x)\}_{n=1}^\infty$ является ортонормированной системой. Она является базисом в гильбертовом пространстве $L_2[0,\,\ell]$ функций, суммируемых со своим квадратом.

Функции $g = g(t,x)$, принадлежащей по переменной x пространству $L_2[0,\,\ell]$, ставится в соответствие функциональный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty g_n(t)X_n(x)$, такой, что

$$\int_0^\ell \left[g(t,x) - \sum_{n=1}^N g_n(t)X_n(x)\right]^2 dx \to 0 \ \text{ при } N \to \infty,$$

$$g_n(t) = \int_0^\ell g(t,\,x)X_n(x)\,dx.$$

При этом выполняется условие $\displaystyle\int_0^T \sum_{n=1}^\infty g_n^2(t)\,dt < \infty$.

Имея это в виду, приступим к решению неоднородной краевой задачи (1.6)–(1.9), будем считать, что $f(t,\,x) \neq 0$ и

$p(t) \neq 0$. Если $u = u(t,\, x)$ удовлетворяет уравнению (1.6), то имеют место тождества по t при $n = 1,\, 2,\, \ldots$:

$$\int\limits_0^\ell \left[\frac{\partial u(t,\, x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(t,\, x)}{\partial x^2} - f(t,\, x)\right] X_n(x)\, dx \equiv 0. \tag{2.3}$$

Кроме того, функция $u = u(t,\, x)$ как функция из $L_2[0, \ell]$ по переменной x, представима в виде $u(t,\, x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x)$ и из (2.3) получаем следующие тождества:

$$\dot{u}_n(t) - a^2 \int\limits_0^\ell \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} X_n(x)\, dx - f_n(t) \equiv 0, \;\; n = 1,\, 2,\, \ldots, \tag{2.4}$$

где $f_n(t) = \int\limits_0^\ell f(t,x) X_n(x)\, dx$.

Преобразуем второе слагаемое в выражении (2.4), вычисляя интеграл два раза по частям и используя граничные условия (1.7) и из задачи (2.1):

$$\int\limits_0^\ell \frac{\partial^2 u(t,\, x)}{\partial x^2} X_n(x)\, dx = \left[\frac{\partial u(t,\, x)}{\partial x} X_n(x) - u(t,x) X_n'(x)\right]_{x=\ell} -$$

$$- \int\limits_0^\ell u(t,\, x)\, X''{}_n(x)\, dx = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\partial u(t,\, x)}{\partial x} [X_n'(x) + \alpha X_n(x)] -\right.$$

$$\left. - \left[\frac{\partial u(t,\, x)}{\partial x} + \alpha u(t,x)\right] X_n'(x)\right]_{x=\ell} - \lambda_n^2 \int\limits_0^\ell u(t,\, x)\, X_n(x)\, dx =$$

$$= -p(t) X_n'(\ell) - \lambda_n^2 u_n(t) = \alpha\, p(t)\, X_n(\ell) - \lambda_n^2 u_n(t).$$

Окончательно из (2.4) получаем следующую систему дифференциальных уравнений с начальными условиями:

$$\begin{aligned} &\dot{u}_n(t) + a^2 \lambda_n^2 u_n(t) = a^2 \alpha p(t) X_n(\ell) + f_n(t); \\ &u_n(0) = \varphi_n, \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots, \end{aligned} \tag{2.5}$$

здесь $\varphi_n = \int\limits_0^\ell \varphi(x) X_n(x)\, dx$.

Решения системы будем искать методом вариации постоянных. Получаем $u_n(t) = C_n(t) e^{-a^2\lambda_n^2 t}$ и, следовательно, имеет место уравнение $\dot{C}_n(t) = \left[a^2\alpha p(t) X_n(\ell) + f_n(t)\right] e^{a^2\lambda_n^2 t}$. Таким образом, находим функцию

$$C_n(t) = c_n + \int\limits_0^t \left[a^2\alpha X_n(\ell) p(s) + f_n(s)\right] e^{a^2\lambda_n^2 s}\, ds.$$

Окончательно определяем решения $u_n(t)$ с учетом начальных условий:

$$u_n(t) = \varphi_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} + \int\limits_0^t \left[\, a^2\alpha X_n(\ell) p(s) + f(s)\right] e^{a^2\lambda_n^2 (s-t)}\, ds.$$

Формально функцию $u = u(t,\, x)$ можно представить в виде

$$u(t,\, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x). \tag{2.6}$$

Заметим, что функция $u = u(t, x)$ не удовлетворяет непосредственно второму граничному условию (1.8), однако функция $u_n(t)$ зависит от функции $p(t)$.

2.2. Обобщенные решения краевых задач. Выясним, в каком смысле решение (2.6) удовлетворяет задаче (1.6)–(1.9). Рассмотрим тождество

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_0^\ell \left[\frac{\partial u(t,\, x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(t,\, x)}{\partial x^2} - f(t,\, x)\right] \varPhi(t,\, x)\, dx\, dt \equiv 0,$$

в котором $\varPhi = \varPhi(t,\, x)$ — произвольная функция, у которой $\varPhi_t \in L_2$ и $\varPhi_x \in L_2$, Интегрируя его по частям, приходим к следующему тождеству:

$$\int_0^{\ell}\left\{\varPhi(t,\,x)u(t,\,x)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial\varPhi}{\partial t}\,u-a^2\frac{\partial\varPhi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+f\varPhi\right]dt\right\}dx+$$

$$+\,a^2\alpha\int_{t_1}^{t_2}\big[u(t,\,\ell)-p(t)\big]\,\Phi(t,\,\ell)\,dt\equiv 0. \qquad (2.7)$$

Заметим, что в полученном тождестве уже отсутствуют производная функции u по переменной t и вторая производная функции u по переменной x.

Обозначим $Q_\ell=\{\,(t,\,x):t>0,\ 0<x<\ell\,\}$.

Определение 2.1. Под *обобщенным решением краевой задачи* (1.6)–(1.9) понимается функция $u=u(t,\,x)$, $u\in W_2^{(0,\,1)}(Q_\ell)$, такая, что она удовлетворяет тождеству (2.7) с любой функции $\varPhi=\varPhi(t,\,x)$, $\varPhi\in W_2^{(1,\,1)}(Q_\ell)$. Функция $u=u(t,\,x)$ удовлетворяет начальному условию (1.9) в следующем смысле:

$$\lim_{t\to+0}\int_0^{\ell}\big[u(t,\,x)-\varphi(x)\big]\,\Psi(x)\,dx=0$$

для любой функции $\Psi=\Psi(x)$, $\Psi\in L_2[0,\,\ell]$.

Построенное решение (2.6) является обобщенным решением краевой задачи (1.6)–(1.9) в указанном в определении 2.1 смысле (см. также [**210**]). Это обобщенное решение однозначно определяется функциями $u_n(t)$, которые, в свою очередь, определяются задачами (2.5).

Из задач (2.5) следует, что *состояние системы определяется последовательностью* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *при* $t=0$, *а в момент времени* $t=t_1$ *— последовательностью* $\{u_n(t_1)\}_{n=1}^{\infty}$. *Таким образом, управляемый процесс может быть задан либо краевой задачей, либо бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Вывод. При исследовании управляемого процесса в системе с распределенными параметрами мы можем либо рассматривать соответствующую краевую задачу, либо бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Если при этом краевые условия не являются однородными, то решение краевой задачи понимается в обобщенном смысле.

3. Минимизация квадратичного функционала в задачах управления теплопроводностью

Задача рассматривается для одномерного уравнения теплопроводности. Однако эта методика без изменения переносится и на многомерные уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[k(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left[k(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right],$$

здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

3.1. Постановки задач. Пусть верно $f \in L_2(Q)$ и $p \in L_2[0, T]$, $T > 0$, где $Q = \{(t, x) : 0 < t < T,\ 0 < x < 1\}$. Рассмотрим процесс, описываемый краевой задачей:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = f(t, x), \qquad (t, x) \in Q;$$

$$u(0, x) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

$$u_x(t, 0) = 0, \quad u_x(t, 1) + \alpha\big[u(t, 1) - p(t)\big] = 0, \qquad t \geqslant 0;$$

здесь $\alpha = \mathrm{const} > 0$.

Допустимыми управлениями могут выступать как функция $p = p(t)$, так и $f = f(t, x)$. При этом функция f может иметь следующий вид: $f(t, x) = g(x) \cdot r(t)$. Функция $g = g(x)$ задана, а управление процессом производится с помощью функции $r = r(t)$, или наоборот.

Задача 3.1. *Среди допустимых управлений нужно выбрать такое, чтобы функционал*

$$J\,[f, p\,] = \int_0^1 \big[u(T, x) - \varphi(x)\big]^2\,dx + {} + \beta \int_0^T \big[p(t)\big]^2\,dt + \gamma \iint_Q \big[f(t, x)\big]^2\,dt\,dx$$

достигал своего наименьшего значения. Здесь β, γ *— положительные постоянные и* φ *— заданная функция из* $L_2[0,\,1]$.

Проанализируем функционал J.

1) Если β и γ малы, то слагаемые, содержащие p и f, не влияют практически на величину J. Поэтому, управляя процессом, стараемся в конечный момент времени получить состояние, близкое к функции φ.

2) Если же β и γ большие, то на величину J первое слагаемое не очень влияет и, управляя процессом, мы экономим ресурсы p и f.

Далее будем рассматривать случай $\gamma = 0$, но методика легко распространяется и на случай $\gamma > 0$.

Пусть процесс описывается следующей краевой задачей:

$$\frac{\partial u(t,\,x)}{\partial t} - a^2\,\frac{\partial^2 u(t,\,x)}{\partial x^2} = 0, \qquad (t,\,x) \in Q; \tag{3.1}$$

$$u(0,\,x) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{3.2}$$

$$u_x(t,\,0) = 0,\;\; u_x(t,\,1) + \alpha\bigl[u(t,\,1) - p(t)\bigr] = 0,\;\; 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.3}$$

где $\alpha > 0$ и $p \in L_2[0,\,T]$.

Под решением сформулированной краевой задачи будем понимать функцию $u = u(t,x) \in W_2^{(0,1)}(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\int\limits_0^1 u(t,\,x)\,\Phi(t,\,x)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} dx - \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^1 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}\,u - a^2\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right] dx\,dt +$$
$$+\, a^2\alpha \int\limits_{t_1}^{t_2} \bigl[u(t,\,1) - p(t)\bigr]\,\Phi(t,\,1)\,dt \equiv 0$$

при любых t_1, t_2 и произвольной функции $\Phi = \Phi(t,x)$ из пространства $W_2^{(1,1)}(Q)$. Начальное условие (3.2) при этом понимается в том смысле, что $\lim\limits_{t\to+0}\int\limits_0^1 u(t,x)\,\Psi(x)\,dx = 0$ при произвольной функции $\Psi = \Psi(x)$ из $L_2[0,\,1]$.

Задача 3.2. *Найти управление $p = p(t)$, на котором функционал*

$$J[p] = \int\limits_0^1 \big[u(T,\, x) - \varphi(x)\big]^2\, dx + \beta \int\limits_0^T \big[p(t)\big]^2\, dt \qquad (3.4)$$

достигает своего наименьшего значения. Здесь β — положительная постоянная и $\varphi \in L_2[0,\, 1]$.

3.2. Вычисление приращения целевого функционала J. Используя методику решения задач оптимального управления, изложенную в предыдущей главе, вычислим приращение функционала $J[p]$, когда управление $p(t)$ получает произвольное допустимое приращение. Это позволит нам воспользоваться принципом максимума, который аналогичен тому, что был сформулирован и доказан выше.

Пусть $p = p(t,\, \beta)$ — оптимальное управление, а Δp — его допустимое приращение. Обозначим $u = u(t,\, x)$ — решение краевой задачи (3.1)–(3.3) при $p = p(t, \beta)$, а функция $u + \Delta u = u(t,\, x,\, \beta) + \Delta u(t,\, x)$ — решение задачи (3.1)–(3.3) при $p(t, \beta) + \Delta p$. Тогда функция $\Delta u = \Delta u(t,\, x)$ есть решение следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial \Delta u(t,\, x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \Delta u(t,\, x)}{\partial x^2} = 0, \qquad (t,\, x) \in Q; \qquad (3.5)$$

$$\Delta u(0,\, x) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \qquad (3.6)$$

$$\Delta u_x(t,\, 0) = 0,\ \Delta u_x(t,\, 1) + \alpha\big[\Delta u(t,\, 1) - \Delta p(t)\big] = 0,\ t \geqslant 0. \quad (3.7)$$

Решение краевой задачи определяется интегральным тождеством:

$$\int\limits_0^1 \Delta u(t,x)\, \varPhi(t,x)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} dx - \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^1 \left[\frac{\partial \varPhi}{\partial t}\, \Delta u - a^2 \frac{\partial \Delta u}{\partial x}\, \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right] dx\, dt + {}$$

$$+ a^2 \alpha \int\limits_{t_1}^{t_2} \big[\Delta u(t,\, 1) - \Delta p(t)\big]\, \varPhi(t,\, 1)\, dt \equiv 0 \qquad (3.8)$$

при любых t_1, t_2, $0 < t_1 < t_2 \leqslant T$ и произвольной функции $\Phi \in W_2^{(1,1)}(Q)$. Начальное условие (3.6) при этом понимается в том смысле, что $\lim\limits_{t\to+0}\int\limits_0^1 \Delta u(t,x)\,\Psi(x)\,dx = 0$ при произвольной функции $\Psi = \Psi(x)$ из $L_2[0,\,1]$.

Вычислим приращение функционала $J[p]$ вида (3.4):

$$\Delta J[p] = J[p(t,\beta) + \Delta p] - J[p(t,\beta)] = \\ = 2\int\limits_0^1 \big[u(T,\,x,\beta) - \varphi(x)\big]\Delta u(T,\,x)\,dx + \\ + 2\beta\int\limits_0^T p(t,\beta)\Delta p(t)\,dt + o(\Delta p,\,\Delta u). \qquad (3.9)$$

Итак, в качестве обобщенного решения рассматриваемой краевой задачи (3.5)–(3.7) берем функцию Δu, удовлетворяющую полученному тождеству (3.8) для всех таких функций $\Phi = \Phi(t,\,x)$, что $\Phi \in L_2(Q)$, $\Phi_t \in L_2(Q)$, $\Phi_x \in L_2(Q)$ и $\Phi(t,\,1) \in L_2[0,\,T]$ и для этих функций выполнено

$$\Phi(T,\,x) = 2\big[u(T,\,x,\beta) - \varphi(x)\big]. \qquad (3.10)$$

Тогда, с учетом свойства (3.10), приращение функционала $\Delta J[p]$ из (3.9) принимает следующий вид:

$$\Delta J[p] = \int\limits_0^1 \Phi(T,\,x)\,\Delta u(T,\,x)\,dx + \\ + 2\beta\int\limits_0^T p(t,\,\beta)\,\Delta p(t)\,dt + o(\Delta p,\,\Delta u). \qquad (3.11)$$

Теперь воспользуемся тождеством (3.8), в котором положим $t_1 = 0$ и $t_2 = T$:

$$\int\limits_0^1 \Delta u(T,\,x)\,\Phi(T,\,x)\,dx - \int\limits_0^T\int\limits_0^1 \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\,\Delta u - a^2\frac{\partial\Delta u}{\partial x}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]\,dx\,dt +$$

$$+a^2\alpha\int\limits_0^T\big[\Delta u(t,\,1)-\Delta p(t)\big]\,\Phi(t,\,1)\,dt\equiv 0. \qquad (3.12)$$

В роли Φ в этом равенстве выберем функцию $\Phi=\Phi(t,x)$, удовлетворяющую тождеству

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^1\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\,\omega-a^2\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,\frac{\partial\omega}{\partial x}\right]\,dx\,dt-$$

$$-\,a^2\alpha\int\limits_{t_1}^{t_2}\Phi(t,\,1)\,\omega(t,\,1)\,dt\equiv 0, \qquad (3.13)$$

которое справедливо при любой функций $\omega=\omega(t,\,x)$, обладающей следующими свойствами: $\omega\in L_2(Q)$, $\omega_x\in L_2(Q)$, $\omega(t,\,1)\in L_2[0,\,T]$ и

$$\lim_{t\to T-0}\int\limits_0^1\Big[\Phi(t,\,x)-2\big[u(t,\,x)-\varphi(x)\big]\Big]\chi(x)\,dx=0 \qquad (3.14)$$

при любой функции $\chi=\chi(x)$ из $L_2[0,\,1]$. Если функция Φ имеет производную $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$, то из (3.13) интегрированием по частям получаем

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^1\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+a^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right]\omega(t,\,x)\,dx\,dt-$$

$$-a^2\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\Phi(t,\,x)}{\partial x}\,\omega(t,\,x)\Big|_{x=0}^{x=1}dt-a^2\alpha\int\limits_{t_1}^{t_2}\Phi(t,\,1)\,\omega(t,\,1)\,dt\equiv 0.$$

Таким образом, эта функция $\Phi=\Phi(t,\,x)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Phi(t,\,x)}{\partial t}+a^2\frac{\partial^2\Phi(t,\,x)}{\partial x^2}\,(t,\,x)=0, \qquad (t,\,x)\in Q;\\ \Phi(T,\,x)=2\big[u(T,\,x)-\varphi(x)\big], \qquad 0\leqslant x\leqslant 1;\\ \frac{\partial\Phi(t,0)}{\partial x}=0;\ \ \frac{\partial\Phi(t,\,1)}{\partial x}+\alpha\Phi(t,\,1)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T.\end{gathered} \qquad (3.15)$$

Если условие $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \in L_2(Q)$ не выполняется, то функцию Φ, определяемую интегральным тождеством (3.13) и условием (3.14), будем называть обобщенным решением краевой задачи (3.15).

В тождестве (3.13) положим $t_1 = 0$, $t_2 = T$ и в качестве функции $\omega = \omega(t,\, x)$ возьмем функцию $\Delta u(t,\, x)$, тогда из (3.13) и (3.12) получаем равенство

$$\int\limits_0^1 \Phi(T,\, x)\, \Delta u(T,\, x)\, dx = a^2\alpha \int\limits_0^T \Delta p(t)\, \Phi(t,\, 1)\, dt.$$

Теперь выражение (3.11) можно представить в виде

$$\Delta J[p] = \int\limits_0^T \bigl[a^2\alpha\, \Phi(t,\, 1) + 2\beta p(t)\bigr]\, \Delta p(t)\, dt + o(\Delta p,\, \Delta u).$$

Положим $H(\Phi,\, p) = -\bigl[\beta\, p^2 + a^2\alpha\Phi(t,\, 1)\, p\,\bigr]$. Тогда

$$\Delta J[p] = -\int\limits_0^T \Delta_p H\bigl(\Phi, p(t,\beta)\bigr)\, dt + o(\Delta p,\, \Delta u).$$

Таким образом, функционал J достигает минимума на оптимальном управлении $p = p(t,\beta)$, если достигает максимума на $p = p(t,\beta)$ введенная функция H. Конечно, остается показать, что $o(\Delta p,\, \Delta u)$ — величина более высокого порядка малости по сравнению с первым слагаемым в полученном выражении $\Delta J[p]$. Этот факт оставим без доказательства[1].

Замечание 3.1. Изложенная в этом разделе методика сработала, поскольку воспользовались понятием обобщенного решения краевой задачи.

3.3. Интегральное уравнение относительно оптимального управления. Используем полученное условие оптимальности для построения оптимального управления. Для этого сначала выведем интегральное уравнение

[1] Полное доказательство см. в **[63]**.

относительно этого управления. Затем докажем единственность его решения и лишь потом будем искать способы построения оптимального управления и его приближений.

Найдем стационарную точку функции $H(\Phi, p)$, которую ввели раньше: $H(\Phi, p) = -\left[\beta p^2 + a^2\alpha\Phi(t, 1)\, p\right]$. Точка определяется из уравнения $\left[a^2\alpha\Phi(t, 1) + 2\beta p\right] = 0$, и, следовательно,

$$p = p(t, \beta) = -\frac{a^2\alpha}{2\beta}\,\Phi(t, 1). \tag{3.16}$$

Функцию (3.16) подставим в краевую задачу (3.1)–(3.3), получаем следующую задачу:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - a^2\,\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0, \qquad (t, x) \in Q; \tag{3.17}$$

$$u(0, x) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{3.18}$$

$$u_x(t, 0) = 0,\ \ u_x(t, 1) + \alpha\left[u(t, 1) + \frac{a^2\alpha}{2\beta}\,\Phi(t, 1)\right] = 0. \tag{3.19}$$

Функция $u = u(t, x, \beta)$, соответствующая оптимальному управлению $p = p(t, \beta)$, является решением этой краевой задачи. Краевую задачу (3.17)–(3.19) решаем совместно с задачей (3.15). Используем метод Фурье. Решением полученной задачи Штурма–Лиувилля

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,$$
$$X'(0) = 0, \quad X'(1) + \alpha X(1) = 0$$

является ортонормированная система собственных функций $X_n(x) = C_n \cos\lambda_n x$ с собственными значениями λ_n — корнями уравнения $\lambda\,\mathrm{tg}\lambda = \alpha$. Эти корни удовлетворяют условию $\dfrac{\lambda_n}{(n-1)\pi} \to 1$ при $n \to \infty$. Итак, справедливо

$$0 = \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}\right] X_n(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\, X_n(x)\, dx - a^2 X_n(x)\,\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\Big|_{x=0}^{x=1} +$$

$$+a^2\int\limits_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} X_n'(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{\partial u(t,\,x)}{\partial t} X_n(x)\,dx - a^2 X_n(1)\frac{\partial u}{\partial x}(t,1) +$$

$$+\,a^2\left[X_n'(x)\,u(t,\,x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int\limits_0^1 u(t,\,x)\,X_n''(x)\,dx\right] =$$

$$= \dot{u}_n(t) - a^2\left[\frac{\partial u(t,\,1)}{\partial x} + \alpha u(t,\,1)\right] X_n(1) + a^2\lambda_n^2 u_n(t).$$

Поскольку $u(0,\,x) = 0$, то $u_n(0) = 0$. Таким образом, приходим к следующей задаче Коши:

$$\begin{aligned} &\dot{u}_n(t) + a^2\lambda_n^2 u_n(t) = a^2\alpha\, X_n(1)p(t);\\ &u_n(0) = 0, \qquad n = 1,\,2,\,\ldots, \end{aligned} \tag{3.20}$$

где $p = p(t)$ определяется формулой (3.16). Это следует из второго равенства в (3.19). Решение полученной задачи Коши (3.20) имеет вид

$$u_n(t) = a^2\alpha\, X_n(1)\int\limits_0^t p(\tau)e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)}\,d\tau. \tag{3.21}$$

Таким образом, получаем решение сформулированной краевой задачи (3.17)–(3.19): $u(t,\,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x)$, где $u_n = u_n(t)$ определены в (3.21).

Аналогичным образом решаем задачу (3.15), разлагая функцию Φ в ряд по собственным функциям. Тогда

$$\Phi(t,\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t)X_n(x). \tag{3.22}$$

Из тождества $\int\limits_0^1 \left[\frac{\partial \Phi(t,\,x)}{\partial t} + a^2\,\frac{\partial^2 \Phi(t,\,x)}{\partial x^2}\right] X_n(x)\,dx \equiv 0$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\Phi}_n(t) - a^2\lambda_n^2\Phi_n(t) = 0, \qquad n = 1,\,2,\,\ldots, \tag{3.23}$$

для нахождения функций $\Phi_n = \Phi_n(t)$. Теперь учтем финальные условия задачи (3.15):

$$\Phi_n(T) = 2\big[u_n(T) - \varphi_n\big], \tag{3.24}$$

где $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x)$. Решения задачи (3.23)–(3.24) имеют вид

$$\Phi_n(t) = 2\Big[u_n(T) - \varphi_n\Big]\, e^{a^2\lambda_n^2(t-T)}. \tag{3.25}$$

Наконец, из (3.16), (3.22) и (3.25), в котором $u_n(T)$ определено в (3.21), получаем интегральное уравнение для функции $p(t)$:

$$p(t) + \frac{a^4\alpha^2}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} X_n^2(1)\int_0^T p(\tau)e^{a^2\lambda_n^2(t+\tau-2T)}\,d\tau = \\ = \frac{a^2\alpha}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} X_n(1)\varphi_n e^{a^2\lambda_n^2(t-T)}.$$

Введем обозначения:

$$f(t) = a^2\alpha\sum_{n=1}^{\infty} X_n(1)\varphi_n e^{a^2\lambda_n^2(t-T)} = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n r_n(t);$$

$$K(t,\,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)\,r_n(\tau); \quad r_n(t) = a^2\alpha X_n(1)\,e^{a^2\lambda_n^2(t-T)}. \tag{3.26}$$

Следовательно, уравнение для нахождения управляющей функции $p = p(t,\beta)$ принимает следующий вид

$$\beta p(t) + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)\,r_n(\tau)p(\tau)\,d\tau = f(t) \tag{3.27}$$

или

$$\beta p(t) + \int_0^T K(t,\,\tau)\,p(\tau)\,d\tau = f(t). \tag{3.28}$$

Уравнение (3.28) является интегральным линейным неоднородным уравнением Фредгольма с симметричным ядром $K(t,\tau)$.

Итак, перед нами стоят две задачи.

1. Доказать существование и единственность решения уравнения (3.28).

2. Найти практически решение (точное или приближенное) полученного интегрального уравнения (3.28). Если удается находить лишь приближенные решения, то желательно получать необходимые оценки погрешности приближений.

3.4. Существование и единственность решения уравнения (3.28). Докажем, что уравнение (3.27) однозначно разрешимо в пространстве $L_2[0, T]$. Непосредственными вычислениями находим

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)\,d\tau\,dt = \int_0^T\int_0^T \left[\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)\,r_n(\tau)\right]^2 dt\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2(t)\sum_{k=1}^{\infty} r_k^2(\tau)dt\,d\tau = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T r_n^2(t)\,dt\right]^2 =$$

$$= \frac{a^4\alpha^4}{4}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n^2(1)}{\lambda_n^2}\left(1-e^{-2a^2\lambda_n^2 T}\right)\right]^2 < \infty.$$

Последнее неравенство следует из того, что (см. (2.2))

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\pi(n-1)} = 1, \quad X_n(x) = C_n\cos\lambda_n x, \quad \int_0^1 X_n^2(x)\,dx = 1.$$

Поэтому линейный симметричный оператор $\beta I + K$, определяемый формулой $(\beta I + K)p = \beta p(t) + \int\limits_0^T K(t,\tau)p(\tau)\,d\tau$, преобразует элемент $p \in L_2[0, T]$ в элемент того же пространства. Так как при любой функции $p = p(t)$ из $L_2[0, T]$ имеем

$$\int_0^T\int_0^T K(t,\tau)\,p(t)\,p(\tau)\,dt\,d\tau = \left[\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)\,p(t)\,dt\right]^2 \geqslant 0,$$

причем равенство $((\beta I + K)p, p)_{L_2} = 0$ возможно тогда и только тогда, когда $p = p(t)$ обращается в нуль для почти всех t из отрезка $[0, T]$. Такой оператор $A = \beta I + K$ называется *положительно определенным.*

Из функционального анализа известна следующая теорема.

Теорема. *Если A — симметричный оператор, отображающий элемент $p \in L_2$ в элемент $f \in L_2$, и оператор A положительно определенный, то для любого элемента $f \in L_2$ уравнение $Ap = f$ имеет единственное решение p, принадлежащее пространству L_2.*

Поэтому уравнение (3.28) однозначно разрешимо в пространстве $L_2[0, T]$ при любой функции f из $L_2[0, T]$.

Найти точное аналитическое решение в замкнутой форме уравнения (3.28) не удается. Поэтому будем строить приближенное решение.

3.5. Построение приближенного решения интегрального уравнения (3.28). Интегральное уравнение (3.27) запишем в виде

$$\beta p(t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n(t) = f(t), \tag{3.29}$$

где

$$c_n = \int_0^T r_n(\tau) p(\tau)\, d\tau. \tag{3.30}$$

Теперь обе части уравнения (3.29) умножим на $r_k(t)$. Результат проинтегрируем от нуля до T. Воспользовавшись обозначением (3.30), приходим к следующему равенству:

$$\beta c_k + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^T r_n(t)\, r_k(t)\, dt = \int_0^T r_k(t)\, f(t)\, dt. \tag{3.31}$$

Обозначим $f_k = \int\limits_0^T r_k(t)\, f(t)\, dt$ и

$$M_{nk} = \int_0^T r_n(t)\, r_k(t)\, dt =$$
$$= a^4 \alpha^2 \frac{X_n(1) X_k(1)}{a^2(\lambda_n^2 + \lambda_k^2)} \left(1 - e^{-a^2(\lambda_n^2 + \lambda_k^2)T}\right).$$

Если воспользоваться обозначениями (3.26) в выражении для f_k, то получим $f_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} M_{nk}\varphi_n$. Тогда равенства (3.31) приводят к бесконечномерной системе алгебраических уравнений

$$\beta c_k + \sum_{n=1}^{\infty} M_{nk}[c_n - \varphi_n] = 0, \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots \tag{3.32}$$

Далее положим $c = \{\, c_1,\, c_2,\, \ldots \}$, $\phi = \{\, \varphi_1,\, \varphi_2,\, \ldots \}$, $M = (M_{kn})$, систему (3.32) запишем в операторной форме пространства[2] l_2:

$$\beta c + M(c - \phi) = 0. \tag{3.33}$$

Введем оператор $\beta + \mathscr{M}$. Он линеен, симметричен и, так же как выше, можно доказать, что он положительно определен. Легко доказать, что ϕ принадлежит пространству l_2. Поэтому система (3.32) имеет при любом $\phi \in l_2$ единственное решение $c(\beta) = \{c_1(\beta),\, c_2(\beta), \ldots\}$.

Анализ точного решения уравнения (3.33) выполнен в следующем параграфе. Здесь рассмотрим вопрос о построении приближенного его решения, ограничиваясь конечномерными системами уравнений.

---

[2]Пространство l_2 — линейное гильбертово пространство таких последовательностей $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$ сходится и норма элемента: $\|c\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\beta g_k + \sum_{n=1}^{N} M_{nk}[g_n - \varphi_n] = 0, \qquad k = 1, \ldots, N. \tag{3.34}$$

При каждом $\beta > 0$ выполнено $\det(\beta E^N + M^N) \neq 0$, где

$$M^N = \begin{pmatrix} M_{11} & \ldots & M_{1N} \\ M_{21} & \ldots & M_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{N1} & \ldots & M_{NN} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, полученная система (3.34) имеет единственное решение $g^N(\beta) = \{g_1^N(\beta), \ldots, g_N^N(\beta)\}$. Остается основной вопрос: будет ли последовательность $\{g^N(\beta)\}$ сходиться к точному решению бесконечной системы (3.34)?

Заметим, что если есть система уравнений

$$\beta \widetilde{g}_k + \sum_{n=1}^{N+p} M_{nk}[\widetilde{g}_n - \varphi_n] = 0, \qquad k = 1, \ldots, N+p, \tag{3.35}$$

и $g^N(\beta) = \{g_1^N(\beta), \ldots, g_N^N(\beta)\}$ — решение системы (3.34), то его можно рассматривать также как решение

$$g^{N,p}(\beta) = \{\widetilde{g}_n\}_{n=1}^{N+p}(\beta) = \{g_1^N(\beta), \ldots, g_N^N(\beta), \underbrace{0, \ldots, 0}_{p}\}$$

системы уравнений

$$\beta \widetilde{g}_k + \sum_{n=1}^{N+p} M_{nk}^p[\widetilde{g}_n - \varphi_n^p] = 0, \qquad k = 1, \ldots, N+p,$$

где ведено следующее обозначение:

$$\varphi^{N,p} = \{\varphi_n^p\}_{n=1}^{N+p} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_N, \underbrace{0, \ldots, 0}_{p}\}$$

и матрица $M^{N,p}$ размера $(N+p)\times(N+p)$ имеет вид:

$$M^{N,p} = \left(M_{nk}^{p}\right) = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1N} & 0 & \dots & 0 \\ M_{21} & \dots & M_{2N} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{N1} & \dots & M_{NN} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решения систем (3.34) и (3.35) можно рассматривать в одном и том же конечномерном пространстве, но у решения одной системы все элементы отличны от нуля, а у другого есть нулевые элементы.

Последовательность $\{g^n(\beta)\}$ есть фундаментальная последовательность в l_2[3]. Поэтому последовательность сходится к точному решению (при $\beta > 0$).

Каждому вектору $g^n(\beta)$ соответствует конкретное приближение $p_n(t,\beta)$ управления $p(t,\beta)$. Легко доказывается, что эти приближения сходятся к точному решению в L_2, т. е. выполняется $\int\limits_0^T \big[p_n(t,\beta) - p(t,\beta)\big]^2\,dx \to 0$ при $n\to\infty$. Таким образом, решая приближенно интегральное уравнение, получаем последовательность интегралов $\int\limits_0^T \big[p_n(t)\big]^2\,dt$. Эта последовательность сходится ко второму слагаемому в функционале J вида (3.4). Про первое слагаемое в функционале J мы пока ничего не знаем.

Обычно в теории управления используются три вида сходимости последовательности приближенных управлений. Первая сходимость — это сходимость последовательности $p_n(t,\beta)$ в пространстве управлений. В рассматриваемом случае — это сходимость в $L_2[0,T]$, которая называется

[3]Полное доказательство этого утверждения можно получить, используя вариационные методы исследования положительно определенных операторов. Необходимые для этого сведения приведены в следующем параграфе.

сходимостью по управлению. Второй тип сходимости называется *сходимостью по функционалу* или *сходимостью по критерию оптимальности.*

В рассматриваемом случае этот тип сходимости определяется тем, что $J[p_n(t,\beta)] \to J[p(t,\beta)]$ при $n \to \infty$.

Для определения третьего типа сходимости требуется каждому оптимальному управлению $p(t,\beta)$ и каждому приближению $p_n(t,\beta)$ управления поставить в соответствие решения $u = u(t,x,\beta)$ и $u^n = u^n(t,x,\beta)$ задачи (3.1)–(3.3) при $p = p(t,\beta)$ и $p = p_n(t,\beta)$ соответственно. Если в метрике пространства $W_2^{(0,1)}(Q)$ выполнено $u^n(t,x,\beta) \to u(t,x,\beta)$ при $n \to \infty$, то такую сходимость приближений управления называют *сходимостью по состоянию.*

Рассмотрим для найденного приближения $p_n(t,\beta)$ управления $p(t,\beta)$ краевую задачу, аналогичную краевой задаче (3.1)–(3.3):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u(t,\,x)}{\partial t} - a^2\,\frac{\partial^2 u(t,\,x)}{\partial x^2} = 0, \qquad (t,\,x) \in Q;\\
u(0,\,x) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1;\\
u_x(t,\,0)=0,\ \ u_x(t,\,1)+\alpha\bigl[u(t,\,1)-p_n(t,\beta)\bigr]=0.
\end{gathered} \tag{3.36}$$

Для каждого $p_n(t,\beta)$ решаем краевую задачу (3.36). Получаем (см. (3.21)):

$$u_k(t) = a^2\alpha X_k(1)\int\limits_0^t e^{-\lambda_k^2 a^2(t-\tau)} p_n(\tau,\beta)\,d\tau, \qquad k = 1,\,2,\,\ldots,$$

и

$$u^n(t,\,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x). \tag{3.37}$$

Мы не можем точно найти сумму, поэтому решаем задачу (3.36) не точно, а приближенно.

Если решать задачу (3.36) методом конечных разностей по переменной x, то получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, если использовать метод конечных разностей по переменным x и t, то получаем систему алгебраических уравнений.

Если для каждого конкретного управления $p_n(t)$ будем строить приближенное решение задачи (3.36), ограничиваясь в рядах (3.37) только конечными суммами, то получим, что приближенное решение $u^n(t, x)$ сходится к точному решению $u(t, x)$, соответствующему управлению $p(t)$, в смысле той метрики, которая задается обобщенными решениями из пространства $W_2^{(0,1)}(Q)$. Эта сходимость называется *сходимостью по решению краевой задачи*.

Из сходимости по управлению и из сходимости по состоянию следует сходимость по критерию оптимальности

$$J_n\left[p_n\right] = \int_0^1 \left[u^n(t, x) - \varphi(x)\right]^2 dx + \beta \int_0^T \left[p_n(t, \beta)\right]^2 dt \to J[p].$$

Более детальный анализ различных типов сходимости в приближенном решении задач управления можно получить на основе вариационных методов математической физики.

Глава 4

Управление с минимальной энергией

1. Элементы вариационных методов математической физики

Вариационные методы математической физики широко используются при исследовании и практическом решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными (см., например, [**15**], [**178**], [**220**]. Основное содержание методов можно сформулировать в виде ряда теорем в терминах функционального анализа. Поэтому их можно применять при решении задач, которые не имеют отношения к математической физике.

В настоящей работе они используются для исследования бесконечных линейных систем алгебраических уравнений. Этими методами удается доказать теоремы существования и единственности решения таких систем и исследовать различные методы их приближенного решения.

Рассмотрим вещественное сепарабельное гильбертово пространство H, норму которого обозначим $\|u\|$, а скалярное произведение через $(u,\,v)$. Далее предположим, что задан оператор $\mathscr{A}$ на некотором всюду плотном в H множестве $D_{\mathscr{A}}$. Пусть оператор $\mathscr{A}$ обладает следующими свойствами:

1°. $\mathscr{A}$ — линеен.

2°. $\mathscr{A}$ — симметричен, т. е. $(\mathscr{A}u,\,v) = (u,\,\mathscr{A}v)$.

3°. $\mathscr{A}$ — положителен в H, т. е. для любого ненулевого элемента $u \in D_{\mathscr{A}}$ выполняется $(\mathscr{A}u,\,u) > 0$, а равенство $(\mathscr{A}u,\,u) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда[1] $u = \theta$.

Приведем пример такого оператора.

[1]Здесь θ — нулевой элемент пространства H.

Пример 1.1. Пусть $H = L_2[0,\,1]$, оператор $\mathscr{A}$ определяется соотношением $\mathscr{A}u = -\dfrac{d^2u}{dx^2}$ на множестве $D_{\mathscr{A}}$ дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,\,1]$ функций, удовлетворяющих условиям: $u(0) = u(1) = 0$.

Известно, что множество $D_{\mathscr{A}}$ дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,\,1]$ функций, удовлетворяющих условиям: $u(0) = u(1) = 0$, является всюду плотным в $L_2[0,\,1]$. Очевидно также, что $\mathscr{A}$ — линейный оператор. Покажем, что он удовлетворяет условиям **2°** и **3°**.

Для введенного оператора $\mathscr{A}$ выполнено **2°**. Действительно,

$$(\mathscr{A}u,\,v) = -\int\limits_0^1 \frac{d^2u}{dx^2}\,v\,dx = \int\limits_0^1 \frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dx}\,dx = \\ -\int\limits_0^1 u\,\frac{d^2v}{dx^2}\,dx = (u,\,\mathscr{A}v).$$

Здесь при интегрировании по частям учтены граничные свойства функций из множества $D_{\mathscr{A}}$.

Проверим свойство **3°**:

$$(\mathscr{A}u,\,u) = -\int\limits_0^1 \frac{d^2u}{dx^2}\,u\,dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \geqslant 0$$

при всех $u(x) \in D_{\mathscr{A}}$. Здесь равенство нулю выполняется тогда и только тогда, когда $\dfrac{du(x)}{dx} = 0$, т. е. при условии $u(x) \equiv \mathrm{const}$. Так как все функции из $D_{\mathscr{A}}$ удовлетворяют условию $u(0) = u(1) = 0$, то $u(x) \equiv 0$.

Справедлива теорема.

Теорема 1.1. *Если $D_{\mathscr{A}}$ — всюду плотное в H множество, оператор $\mathscr{A}$ положителен в H и $f \in H$, то уравнение*

$$\mathscr{A}u = f \tag{1.1}$$

в $D_{\mathscr{A}}$ может иметь не более одного решения.

Доказательство. От противного: пусть $\mathscr{A}u_0 = f$ и $\mathscr{A}v_0 = f$. Тогда $\mathscr{A}\big(u_0 - v_0\big) = \theta$, поэтому справедливо $\big(\mathscr{A}(u_0 - v_0),\, (u_0 - v_0)\big) = 0$ и, в силу свойства $\mathbf{3^\circ}$, выполняется $u_0 = v_0$.

Теорема 1.2. *Пусть оператор $\mathscr{A}$ положителен в H. Для того чтобы элемент $u_0 \in D_{\mathscr{A}}$ был решением уравнения* (1.1), *необходимо и достаточно, чтобы этот элемент доставлял минимум функционалу*

$$\mathscr{F}[u] = (\mathscr{A}u,\, u) - 2(f,\, u) \tag{1.2}$$

на этом множестве.

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что выполнено равенство $\mathscr{A}u_0 = f$ и $v = u_0 + \eta$ — элемент множества $D_{\mathscr{A}}$ для $\eta \neq \theta$. Тогда справедливо

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[v] = \mathscr{F}[u_0 + \eta] = \big(\mathscr{A}(u_0 + \eta),\, u_0 + \eta\big) - 2(f,\, u_0 + \eta) = \\ = \big(\mathscr{A}u_0,\, u_0\big) - 2(f,\, u_0) + 2\big(\mathscr{A}u_0, \eta\big) - 2(f,\, \eta) + \\ + \big(\mathscr{A}\eta,\, \eta\big) = \mathscr{F}[u_0] + \big(\mathscr{A}\eta,\, \eta\big).\end{aligned}$$

Из свойства $\mathbf{3^\circ}$ следует, что $\mathscr{F}[u_0 + \eta] > \mathscr{F}[u_0]$ при $\eta \neq 0$.

Достаточность. Пусть $u_0 \in D_{\mathscr{A}}$ доставляет минимум функционалу $\mathscr{F}$, т. е. $\mathscr{F}[u_0 + t\eta] \geqslant \mathscr{F}[u_0]$ для всех $\eta \in D_{\mathscr{A}}$. Тогда

$$\mathscr{F}[u_0 + t\eta] - \mathscr{F}[u_0] = t^2\big(\mathscr{A}\eta,\, \eta\big) - 2t\big(\mathscr{A}u_0 - f,\, \eta\big).$$

Заметим, что правая часть полученного равенства неотрицательна, если $\mathscr{A}u_0 = f$.

1.1. Уравнения с положительно определенным оператором. Более детальный анализ связи уравнения $\mathscr{A}u = f$ с функционалом $\mathscr{F}[u] = (\mathscr{A}u,\, u) - 2(f,\, u)$ начнем с определения.

Определение 1.1. Положительный в H оператор $\mathscr{A}$ называется *положительно определенным в H*, если существует такая постоянная γ, что выполняется неравенство $(\mathscr{A}u,\, u) \geqslant \gamma^2\|u\|^2$ для всех $u \in D_{\mathscr{A}}$.

Пример 1.2. Оператор $\mathscr{A}$, определенный в примере 1.1, является положительно определенным. Действительно, поскольку для $u \in D_{\mathscr{A}}$ справедливо

$$|u(x)|^2 = \left|\int\limits_0^x \frac{du(z)}{dz}\,dz\right|^2 \leqslant \int\limits_0^x dz \cdot \int\limits_0^x \Big[\frac{du(z)}{dz}\Big]^2 dz,$$

то $\int\limits_0^1 |u(x)|^2\,dx \leqslant \int\limits_0^1 \Big[\frac{du(x)}{dx}\Big]^2 dx$. Следовательно, имеет место следующее неравенство: $(\mathscr{A}u,\, u) = \int\limits_0^1 \Big(\frac{du}{dx}\Big)^2 dx \geqslant \|u\|^2$. Таким образом, введенный оператор $\mathscr{A}$ является положительно определенным в $L_2[0,\,1]$.

В подпространстве $D_{\mathscr{A}}$ определим норму $[u]$ элемента u следующим образом: $[u] = (\mathscr{A}u,\, u)^{1/2}$. Введенный оператор обладает всеми свойствами нормы, поэтому $D_{\mathscr{A}}$ — нормированное пространство. Далее определим в $D_{\mathscr{A}}$ скалярное произведение элементов u и v из $D_{\mathscr{A}}$, положив $[u,\,v] = (\mathscr{A}u,\, v)$.

Пополним $D_{\mathscr{A}}$ предельными элементами всех фундаментальных последовательностей $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $D_{\mathscr{A}}$. На этих предельных элементах определим ту же норму и то же скалярное произведение. В результате получим гильбертово пространство, порожденное оператором $\mathscr{A}$, которое называется *энергетическим пространством оператора* $\mathscr{A}$ и обозначается $H_{\mathscr{A}}$. Норма $[u]$ и скалярное произведение $[u, v]$ называются соответственно *энергической нормой* и *энергическим скалярным произведением* этого оператора.

Пример 1.3. Для оператора $\mathscr{A}$, определенного в примере 1.1, получаем

$$[u]^2 = (\mathscr{A}u,\, u) = \int\limits_0^1 \Big(\frac{du}{dx}\Big)^2 dx,\ [u, v] = (\mathscr{A}u,\, u) = \int\limits_0^1 \frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dx}\,dx.$$

Следовательно, любой последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $D_{\mathscr{A}}$, фундаментальной в смысле нормы $[u]$, соответствует предельный элемент u, принадлежащий энергетическому пространству. Поэтому энергетическое пространство есть множество функций $u = u(x)$, для которых выполнено

$\int\limits_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx < \infty$, т. е. это множество функций, имеющих производную, интегрируемую с квадратом.

Если оператор $\mathscr{A}$ положительно определен в H (см. определение 1.1), то выполнено неравенство для всех элементов $u \in D_{\mathscr{A}}$:

$$[u] \geqslant \gamma\|u\|. \tag{1.3}$$

Если последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна в $H_{\mathscr{A}}$, то из (1.3) следует, что она фундаментальна и в H. Поэтому имеет место вложение $H_{\mathscr{A}} \subset H$.

Выясним, как выглядит функционал $\mathscr{F}$ (см. (1.2)), определенный на $D_{\mathscr{A}}$, в этом энергетическом пространстве. Поскольку из (1.3) следует, что $\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma}\,[u]$ для всех $u \in D_{\mathscr{A}}$ и справедливы неравенства

$$|(f,\, u)| \leqslant \|f\| \cdot \|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma}\,\|f\| \cdot [u],$$

то линейный функционал $(f,\, u)$ ограничен в энергетической норме. Поэтому существует такой элемент $\ell \in D_{\mathscr{A}}$, что выполняется $(f,\, u) = [\ell,\, u]$. Следовательно, введенный функционал $\mathscr{F}$ имеет следующий вид:

$$\mathscr{F}(u) = (\mathscr{A}u,\, u) - 2(f,\, u) = [u]^2 - 2[\ell,\, u].$$

Этот функционал с сохранением нормы можно продолжить на все пространство $H_{\mathscr{A}}$, т. е. найдется такой элемент u_0 из $H_{\mathscr{A}}$, что

$$\mathscr{F}(u) = [u]^2 - 2[u_0,\, u] = [u - u_0]^2 - [u_0]^2. \tag{1.4}$$

Очевидно, что функционал $\mathscr{F}$ достигает минимума на элементе $u_0 \in H_{\mathscr{A}}$, а в силу теоремы 1.2 этот элемент является решением уравнения (1.1) и по теореме 1.1 это решение единственно.

Если $u_0 \in D_{\mathscr{A}}$, то u_0 называется *классическим решением* уравнения (1.1), если $u_0 \notin D_{\mathscr{A}}$, то u_0 называется *обобщенным решением* уравнения (1.1).

Пример 1.4. Для оператора $\mathscr{A}$ из примера 1.1 уравнение (1.1) имеет вид $\dfrac{d^2u}{dx^2} = f(x)$, $f \in L_2[0, 1]$. Если искать решение $u = u(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям $u(0) = u(1) = 0$, то возможны два случая. Функция $u(x)$ принадлежит $D_{\mathscr{A}}$ или $u \notin D_{\mathscr{A}}$. Во втором случае она обладает свойством $\int\limits_0^1 \left(\dfrac{du}{dx}\right)^2 dx < \infty$ и является обобщенным решением уравнения. В том и другом случае решение единственно.

Поскольку H сепарабельно, то $H_{\mathscr{A}}$ также является сепарабельным. Следовательно, в $H_{\mathscr{A}}$ существует полная ортонормированная система $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$. Решение $u_0 \in H_{\mathscr{A}}$ уравнения (1.1) имеет вид $u_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}[u_0, w_n]w_n$. Тогда конечная сумма $u_0^N = \sum\limits_{n=1}^{N}[u_0, w_n]w_n$ есть приближение этого решения. В силу теоремы о минимальном свойстве рядов Фурье это приближение является наилучшим приближением в $H_{\mathscr{A}}$ решения u_0 среди всех конечных линейных комбинаций вида $\sum\limits_{n=1}^{N} c_n w_n$.

Можно доказать также, что такие приближения устойчивы к помехам оператора $\mathscr{A}$ и элемента f.

Вывод. Если оператор $\mathscr{A}$ положительно определен, то задача решения уравнения (1.1) сводится к задаче минимизации функционала $\mathscr{F}$ вида (1.2) при этом:

1) установлено существование и единственность решения;
2) указана процедура нахождения приближенного решения;
3) указанная процедура устойчива.

1.2. Уравнение с положительным оператором. Пусть теперь оператор $\mathscr{A}$ не является положительно определенным в H, но положительным. Это означает, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists u_n \in D_{\mathscr{A}}: \quad (\mathscr{A} u_n,\, u_n) < \frac{1}{n^2}\, \|u_n\|^2). \tag{1.5}$$

В силу условия (1.5) имеет место включение $H \subset H_{\mathscr{A}}$. Поэтому линейный в H функционал $(f,\, u)$ может быть неограниченным в $D_{\mathscr{A}}$ и его, вообще говоря, нельзя представить в следующем виде: $(f,\, u) = [\ell,\, u]$. Однако справедлива

Теорема 1.3. *Для того чтобы уравнение* (1.1) *имело решение в $H_{\mathscr{A}}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная $N > 0$, что $|(f,\, u)| \leqslant N[u]$ для всех $u \in D_{\mathscr{A}}$.*

Доказательство. При выполнении следующего условия: $|(f,\, u)| \leqslant N[u]$ для всех $u \in D_{\mathscr{A}}$ функционал $\mathscr{F}(u)$ можно представить в виде: $\mathscr{F}(u) = [u]^2 - 2[\ell,\, u]$ для всех u из $D_{\mathscr{A}}$. Функционал $[\ell,\, u]$ продолжаем на все пространство $H_{\mathscr{A}}$ с сохранением нормы и находим элемент $u_0 \in H_{\mathscr{A}}$ такой, что $[\ell,\, u] = [u_0,\, u]$. Таким образом, в пространстве $H_{\mathscr{A}}$ функционал $\mathscr{F}(u)$ можно представить в виде (1.4). Следовательно, элемент $u_0 \in H_{\mathscr{A}}$ доставляет минимум функционалу $\mathscr{F}(u)$.

Пусть u_0 — решение уравнения $\mathscr{A} u = f$. Функционал $\mathscr{F}(u)$ можно представить в виде

$$\mathscr{F}(u) = [u]^2 - 2(f, u). \tag{1.6}$$

Его можно рассматривать как функционал, определенный в гильбертовом пространстве $H_{\mathscr{A}}$, в котором $D_{\mathscr{A}}$ — всюду плотное множество. Следовательно, по теореме 4.2 элемент u_0 доставляет минимум функционалу (1.6). Это возможно лишь при условии, что функционал (f, u) ограничен в метрике пространства $H_{\mathscr{A}}$. Теорема доказана.

Если $u_0 \in D_{\mathscr{A}}$, то u_0 называется *классическим решением* уравнения (1.1), если $u_0 \notin D_{\mathscr{A}}$, то u_0 называется *обобщенным решением* уравнения (1.1)[2].

[2] Обратим внимание на то, что в этом случае либо $u_0 \in H \setminus D_{\mathscr{A}}$, либо $u_0 \in H_{\mathscr{A}} \setminus H$.

Замечание 1.1. Заметим, что на практике проверка условия $|(f,\, u)| \leqslant N[u]$ для конкретного функционала не всегда является простой задачей. Поэтому представляет интерес получение практически проверяемых достаточных условий.

Поскольку H — сепарабельное пространство, то в $H_{\mathscr{A}}$ оператор $\mathscr{A}$ имеет полную ортонормированную в l_2 систему собственных элементов $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательность соответствующих собственных значений $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\mathscr{A} w_n = \rho_n w_n, \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

Теорема 1.4. *Для того чтобы уравнение* (1.1) *с положительным оператором* $\mathscr{A}$ *имело решение в пространстве* $H_{\mathscr{A}}$, *достаточно, чтобы сходился ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\bigl(f_n^2/\rho_n\bigr)$, *где* $f_n = [f,\, w_n]$.

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\bigl(f_n^2/\rho_n\bigr)$ следует, что существует такая положительная постоянная N, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\bigl(f_n^2/\rho_n\bigr) \leqslant N^2$.

Покажем, что из условия теоремы 1.4 следует выполнение условия теоремы 1.3.

Сначала заметим, что произвольный элемент v из $H_{\mathscr{A}}$ можно представить в виде $v = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n w_n$, $v_n = [v,\, w_n]$. Поэтому можно записать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}[v,\, v] = \left(\mathscr{A}\Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} v_n w_n\Bigr),\, \sum_{n=1}^{\infty} v_n w_n\right) &= \\ = \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathscr{A} w_n,\, \sum_{n=1}^{\infty} v_n w_n\right) &= \\ = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n v_n w_n,\, \sum_{m=1}^{\infty} v_m w_m\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n v_n^2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Если $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n w_n$ и $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n w_n$, то из (1.7) следует

$$|(f,\, u)| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n\Big| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\sqrt{\rho_n}}\, u_n \sqrt{\rho_n}\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\rho_n}} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n u_n^2} \leqslant N[u].$$

Отсюда следует, что функционал $f(u)$ можно представить в виде $f(u) = [u_0, u]$ при всех $u \in H_{\mathscr{A}}$, а функционал $\mathscr{F}(u)$ при этом допускает следующее представление: $\mathscr{F}(u) = [u - u_0]^2 - [u_0]^2$. Следовательно, элемент u_0 из $u \in H_{\mathscr{A}}$ является решением уравнения $\mathscr{A} u = f$.

1.3. Приближенное решение уравнения (1.1). В этом пункте рассмотрим методы приближенного решения уравнения $\mathscr{A} u = f$. При этом будем предполагать, что $\mathscr{A}$ — положительный оператор, H сепарабельно, а спектр оператора $\mathscr{A}$ является чисто точечным. Кроме того, будем предполагать, что все собственные элементы оператора $\mathscr{A}$ принадлежат $D_{\mathscr{A}}$.

Один из наиболее естественных способов построения приближенного решения уравнения состоит в следующем. Предположим, что $f^N = \sum\limits_{n=1}^{N} f_n w_n$, $f_n = [f, w_n]$. Тогда в качестве приближенного решения исходного уравнения берется решение уравнения

$$\mathscr{A} u = f^N. \tag{1.8}$$

Теорема 1.5. *При выполнении условий теоремы* 1.4 *решения уравнения* (1.8) *сходятся к решению уравнения* $\mathscr{A} u = f$ *в метрике пространства* $H_{\mathscr{A}}$ *при* $N \to \infty$.

Доказательство. Так как любой элемент u можно представить в виде $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n w_n$, $u_n = [u, w_n]$, то решения уравнений (1.1) и (1.8) можно представить соответственно в виде $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\rho_n} w_n$, $u^N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{f_n}{\rho_n} w_n$.

Поэтому при $N \to \infty$

$$\begin{aligned}\left[u - u^N\right]^2 &= \left(\mathscr{A}(u - u^N),\, u - u^N\right) = \\ &= \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n w_n,\ \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f_n}{\rho_n} w_n\right) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\rho_n} \to 0.\end{aligned}$$

Теорема 1.6. *Решение уравнения* (1.1) *неустойчиво в* $H_{\mathscr{A}}$ *относительно малых в* H *изменений* f, *т. е. если* u^0 *и* u^N *решения уравнений* (1.1) *и* (1.8) *соответственно, то из того, что* $\|f - f^N\| \to 0$ *при* $N \to \infty$, *вообще говоря, не следует, что* $[u^0 - u^N] \to 0$.

Доказательство. Пусть

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n w_n,\ f^N = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^N w_n,\ \|f - f^N\| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n - f_n^N\right)^2 \to 0.$$

Тогда очевидно, что

$$u^0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^0 w_n,\ u^N = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^N w_n, \text{ где } \quad u_n^0 = \frac{f_n}{\rho_n}, \quad u_n^N = \frac{f_n^N}{\rho_n}$$

и, следовательно, $[u^0 - u^N]^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(f_n - f_n^N)^2}{\rho_n}$. Поскольку $\rho_n \to 0$, то из стремления к нулю величины $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (f_n - f_n^N)^2$ далеко не всегда будет следовать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_n - f_n^N)^2}{\rho_n} \to 0 \ \text{ при } N \to 0. \tag{1.9}$$

Следствие 1.1. *Если в уравнениях* (1.1) *и* (1.8) *выполнено условие* (1.9), *то решение уравнения* (1.1) *устойчиво в* $H_{\mathscr{A}}$ *относительно малых в* H *изменений* f.

С вычислительной точки зрения представляет интерес случай, когда в уравнении (1.1) оператор $\mathscr{A}$ и элемент f

вычисляются приближенно, т. е. вместе с этим уравнением рассматривается семейство уравнений

$$\mathscr{A}_n u = f^n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.10}$$

где операторы $\mathscr{A}_n$ положительны при любом n и обладают всеми теми свойствами, о которых говорилось в начале настоящего пункта относительно оператора $\mathscr{A}$. Кроме того, предполагается, что

$$\|\mathscr{A} - \mathscr{A}_n\| \to 0, \quad \|f - f^n\| \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Для детального анализа связей, которые существуют между уравнениями (1.1) и (1.10) и потребуются нам в дальнейшем, рассмотрим два случая.

1. Оператор $\mathscr{A}_n$ является проекцией оператора $\mathscr{A}$ на подпространство, порожденное первыми n собственными элементами оператора $\mathscr{A}$.

2. Оператор $\mathscr{A}_n$ является той же проекцией, но вычисленной с некоторой погрешностью.

Сначала рассмотрим первый случай. Пусть w_i — собственный элемент оператора $\mathscr{A}$, т. е. $\mathscr{A} w_i = \rho_i w_i$, а H_i — одномерное пространство, порожденное этим оператором, т. е. множество всех элементов из H, представимых в виде $u = \alpha w_i$, где α — любое вещественное число.

Определение 1.2. *Оператор $\mathscr{P}_i$, определяемый формулой*

$$\mathscr{P}_i u = (u, w_i) w_i, \qquad u \in H,$$

называется оператором проектирования H на H_i.

Очевидны простейшие свойства этого оператора:

1) $\mathscr{P}_i \mathscr{P}_j = \delta_{ij} \mathscr{P}_i$, где δ_{ij} — символ Кронекера;

2) $\mathscr{A} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i \mathscr{P}_i$.

Таким образом, согласно предположению, оператор $\mathscr{A}_n$ можно представить в виде $\mathscr{A}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i \mathscr{P}_i$, и при $n \to \infty$ условие $\|\mathscr{A} - \mathscr{A}_n\| \to 0$ будет выполняться, если

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty. \tag{1.11}$$

Считая, что это неравенство имеет место, можно сравнить решения уравнений. Легко устанавливается, что решения уравнений (1.1) и (1.10) можно представить соответственно в виде $u = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\rho_i} w_i$, $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{\rho_i} w_i$, и поэтому $[u - u_n] \to 0$ при $n \to \infty$.

Полученный результат означает, что справедлива теорема.

Теорема 1.7. *Если $\mathscr{A}_n$ является оператором проектирования $\mathscr{A}$ на n-мерное пространство, порожденное n собственными элементами оператора $\mathscr{A}$, и выполняется условие* (1.11), *то решение уравнения $\mathscr{A}_n u = f^n$ сходится в $H_{\mathscr{A}_n}$ к решению уравнения $\mathscr{A} u = f$ при $n \to \infty$.*

Рассмотрим теперь второй случай.

Пусть $\mathscr{A}_n$ является результатом приближенного вычисления оператора проектирования на подпространство, натянутое на собственные элементы $w_1, \ldots, w_n$ оператора $\mathscr{A}$. Это означает, что $\mathscr{A}_n = \mathscr{B}_n + \mathscr{G}_n$, где $\mathscr{B}_n$ — оператор проектирования, а $\mathscr{G}_n$ — оператор, определяющий ошибку вычислений, допущенных при построении $\mathscr{B}_n$. Если, кроме того, правая часть уравнения $\mathscr{A}_n u = f^n$ вычисляется с ошибкой δ^n, то практически вместо уравнения $\mathscr{A}_n u = f^n$ приходится решать уравнение

$$(\mathscr{B}_n + \mathscr{G}_n) u = f^n + \delta^n. \tag{1.12}$$

Поэтому надо рассмотреть, насколько решение $u = U_n$ уравнения (1.12) уклоняется от решения $u = u_n$ уравнения $\mathscr{A}_n u = f^n$.

Определение 1.3. Процесс нахождения решения u_n уравнения $\mathscr{A}_n u = f^n$ называется *о-устойчивым*, если выполнены условия:

1) $\dfrac{\|\mathscr{G}_n\|}{\|\mathscr{B}_n\|} \to 0$ при $n \to \infty$;

2) если $\dfrac{\|\delta^n\|}{\|f^n\|} \to 0$ при $n \to \infty$, то $\dfrac{\|U_n - u_n\|}{\|u_n\|} \to 0$ при $n \to \infty$.

Следующая теорема[3] дает исчерпывающий ответ на вопрос об устойчивости процедуры построения приближенного решения уравнений $\mathscr{A}_n u = f^n$, $n = 1, 2, \ldots$

Теорема 1.8. *Для того чтобы процесс нахождения последовательности $\{u_n\}$ был о-устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы была ограниченной последовательность $\left\{\|\mathscr{B}^n\| \cdot \|(\mathscr{B}^n)^{-1}\|\right\}$.*

1.4. Регуляризация решения уравнения в случае положительного оператора. Выше рассмотрены некоторые процедуры построения приближенных решений, основанные на использовании координатных элементов. В качестве таких элементов использовались собственные элементы оператора $\mathscr{A}$. В этом пункте рассматривается другой способ построения приближенных решений того же уравнения, не связанный с использованием координатных систем.

Как и прежде, будем предполагать, что оператор $\mathscr{A}$ имеет точечный спектр $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_n \geqslant \ldots$, $\lim \rho_n = 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 1.9. *Если $\mathscr{A}$ — положительный оператор в H с точечным спектром, а $\{w_n\}$ — его полная ортонормированная система собственных элементов, $w_n \in D_{\mathscr{A}}$, то*

$$\lim_{\beta \to 0} [u - u(\beta)] = 0, \tag{1.13}$$

где u и $u(\beta)$ — решения уравнений[4] $\mathscr{A} u = f$ и $\beta I u + \mathscr{A} u = f$ соответственно.

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 4.4, то уравнение $\mathscr{A} u = f$ имеет единственное решение u в пространстве $H_{\mathscr{A}}$. Уравнение $\beta u + \mathscr{A} u = f$ однозначно разрешимо в H при произвольном положительном β, поскольку $\big((\beta I + \mathscr{A})u, u\big) \geqslant \beta \|u\|^2$ при всех u из $D_{\mathscr{A}}$ и, следовательно, оператор $\beta I + \mathscr{A}$ является положительно

[3] Доказательство этой теоремы см. в книге М. К. Гаврин. Лекции по приближенным вычислениям. М.: Наука, 1971. С. 22–23.

[4] Здесь I — оператор тождественного преобразования.

определенным в H. Остается показать, что имеет место равенство (1.13). Полагая $u(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\beta) w_n$, $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n w_n$, из уравнения $\beta u + \mathscr{A} u = f$ находим, что $u_n(\beta) = f_n/(\rho_n + \beta)$. Следовательно, $u(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\rho_n + \beta} w_n$. Так как уравнение $\mathscr{A} u = f$ имеет решение $u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\rho_n} w_n$ и $\rho_m \geqslant \rho_{m+1}$, то на решениях уравнений выполняются равенства:

$$\mathscr{A} u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\rho_n} w_n, \ \ \beta u(\beta) + \mathscr{A} u(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\beta + \rho_n} w_n.$$

Поэтому получаем

$$\begin{aligned}
&[u - u(\beta)]^2 = \big(\mathscr{A}\big(u - u(\beta)\big), u - u(\beta)\big) = \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n f_n \left[\frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho_n + \beta} \right] w_n, \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left[\frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho_n + \beta} \right] w_n \right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n f_n^2 \left[\frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho_n + \beta} \right]^2 = \beta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\rho_n} \cdot \frac{1}{(\rho_n + \beta)^2} \leqslant \\
&\leqslant \frac{\beta^2}{(\rho_N + \beta)^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n^2}{\rho_n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\rho_n}.
\end{aligned}$$

Пусть ε — произвольно малое положительное число. Выберем N настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\rho_n} < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Это можно сделать в силу предположения об элементе f. Зафиксировав такое N, выберем β настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\frac{\beta^2}{(\rho_N + \beta)^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n^2}{\rho_n} < \frac{\varepsilon^2}{2}$. В результате получим $[u - u(\beta)] < \varepsilon$.

2. Управление с минимальной энергией

2.1. Постановка задачи. По-прежнему будем использовать обозначение $Q = \{(t,\, x) : \, 0 < t < T, \; 0 < x < 1\}$. Предполагаем, что процесс описывается краевой задачей

$$\frac{\partial u(t,\, x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(t,\, x)}{\partial x^2} = 0, \qquad (t,\, x) \in Q; \tag{2.1}$$

$$u(0,\, x) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{2.2}$$

$$u_x(t,\, 0) = 0, \quad u_x(t,\, 1) + \alpha\big[u(t,\, 1) - p(t)\big] = 0; \tag{2.3}$$

здесь $\alpha = \mathrm{const} > 0$.

Задача 2.1. *Пусть процесс описывается краевой задачей* (2.1)–(2.3) *и допустимые управления* $p = p(t)$ *принадлежат пространству* $L_2[0,\, T]$. *Требуется найти такое управление* $p = p(t)$*, что для соответствующего ему решения* $u = u(t,\, x)$ *краевой задачи* (2.1)–(2.3) *выполнено условие*

$$u(T,\, x) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.4}$$

и при этом функционал

$$J[p\,] = \int\limits_0^T p^2(t)\, dt \tag{2.5}$$

достигал бы своего наименьшего значения.

2.2. Эквивалентные задачи. Для решения задачи 2.1 будем поступать стандартным способом, используя собственные функции, которые находим при решении задачи Штурма–Лиувилля:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,$$
$$X'(0) = 0, \quad X'(1) + \alpha X(1) = 0.$$

Собственные значения $\lambda_n, \; n = 1,\, 2,\, \ldots,$ являются корнями следующего уравнения: $\lambda \operatorname{tg} \lambda = \alpha$. При этом справедливо соотношение (см. (2.2) в гл. 3) $\dfrac{\lambda_n}{(n-1)\pi} \to 1$ при

$n \to \infty$. Соответствующие им собственные функции имеют вид $X_n(x) = C_n \cos \lambda_n x$, причем выполняется

$$\int\limits_0^1 X_n(x) X_m(x)\, dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Обратим внимание на тот факт, что система собственных функций $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является полной в $L_2[0, T]$.

Таким образом, решение $u = u(t, x)$ краевой задачи (2.1)–(2.3) можно представить в виде функционального ряда $u(t, x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x)$, где каждая из функций $u_n(t)$ является решением задачи Коши (см. (3.20))

$$\dot{u}_n(t) + a^2 \lambda_n^2 u_n(t) = a^2 \alpha X_n(1) p(t), \qquad u_n(0) = 0,$$

и имеет вид $u_n(t) = a^2 \alpha X_n(1) \int\limits_0^t e^{-a^2 \lambda_n^2 (t-\tau)}\, p(\tau)\, d\tau$.

Учитывая сказанное, условие (2.4) можно переписать следующим образом, используя коэффициенты Фурье для $n = 1, 2, \ldots:$

$$a^2 \alpha X_n(1) \int\limits_0^T e^{-a^2 \lambda_n^2 (T-\tau)} p(\tau)\, d\tau = \varphi_n, \tag{2.6}$$

где

$$\varphi_n = \int\limits_0^1 \varphi(x) X_n(x)\, dx, \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x). \tag{2.7}$$

Поэтому от задачи 2.1 можно перейти к следующей задаче.

Задача 2.2. *Найти управляющую функцию $p = p(t)$, удовлетворяющую системе* (2.6), *на которой функционал $J[p]$ вида* (2.5) *достигает наименьшего значения.*

Обратим внимание на тот факт, что, согласно теореме Мюнца[5], система функций $\left\{e^{-a^2\lambda_n^2(T-t)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ не является полной в пространстве $L_2[0, T]$. Это означает, что пространство $L_2[0, T]$ можно представить в виде $L_2[0, T] = H_\lambda \oplus H_\lambda^\perp$, где H_λ — подпространство пространства $L_2[0, T]$, в котором система функций $\left\{e^{-a^2\lambda_n^2(T-t)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом, а $H_\lambda^\perp$ — его ортогональное дополнение.

Заметим, что $J[p]$ имеет вид $J[p] = \|p\|^2$, здесь символом $\|\cdot\|$ обозначена норма элемента в пространстве $L_2[0, T]$. Произвольная функция p из $L_2[0, T]$ представима следующим образом: $p = p_0 + p_1$, где $p_0 \in H_\lambda$ и $p_1 \in H_\lambda^\perp$. При этом справедливо равенство $\|p\|^2 = \|p_0\|^2 + \|p_1\|^2$.

Рассматриваемая нами задача 2.2 состоит в отыскании управления p, на котором рассматриваемый функционал $J[p] = \|p\|^2$ достигает своего наименьшего значения при выполнении условий (2.6).

Обозначим через (p, ψ) скалярное произведение функций p и ψ из $L_2[0, T]$. Тогда условия (2.6) для $n = 1, 2, \ldots$ можно представить в следующем виде:

$$\left(r_n\, e^{-a^2\lambda_n^2(T-t)}, p(t)\right) = \varphi_n, \qquad r_n = a^2\alpha X_n(1). \tag{2.8}$$

Таким образом, рассматриваемая задача об оптимальном управлении может быть сформулирована в терминах функционального анализа.

Задача 2.3. *Требуется найти элемент $p \in L_2[0, T]$ с минимальной нормой, удовлетворяющий условиям* (2.8).

Покажем, что решение задачи 2.3 сводится к решению бесконечномерной системы линейных неоднородных алгебраических уравнений.

Поскольку функция p из пространства $L_2[0, T]$ представима в виде $p = p_0 + p_1$, где $p_0 \in H_\lambda$ и $p_1 \in H_\lambda^\perp$, то

---

[5] См., например, Математическая энциклопедия. М.: Изд-во Советская энциклопедия, 1982. Т. 3. С. 846.

имеют место следующие выражения:

$$p_0(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m r_m e^{-a^2\lambda_m^2(T-t)}, \qquad\qquad (2.9)$$
$$\left(r_n e^{-a^2\lambda_n^2(T-t)},\, p_1(t)\right) = 0,$$

здесь $n = 1,\, 2,\, \ldots$ Так как

$$\|p_0\|^2 = \sum_{m,\,n=1}^{\infty} \gamma_m\gamma_n \int_0^T r_m r_n e^{-a^2\lambda_m^2(T-t)} e^{-a^2\lambda_n^2(T-t)}\, dt < \infty,$$

то постоянные γ_n, $n = 1,\, 2,\, \ldots$, удовлетворяют следующему условию:

$$\sum_{m,\,n=1}^{\infty} M_{mn}\gamma_m\gamma_n < \infty, \qquad\qquad (2.10)$$

где

$$M_{mn} = \frac{r_m r_n}{a^2(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)} \left(1 - e^{-a^2(\lambda_m^2+\lambda_n^2)T}\right). \qquad\qquad (2.11)$$

Из второго равенства в (2.9) следует, что слагаемое p_1 не влияет на то, удовлетворяет ли элемент $p \in L_2[0,\, T]$ условиям (2.8). В силу равенства $\|p\|^2 = \|p_0\|^2 + \|p_1\|^2$ элемент p_1 увеличивает норму элемента p. Поэтому оптимальное управление следует искать в виде

$$p(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m r_m e^{-a^2\lambda_m^2(T-t)}. \qquad\qquad (2.12)$$

Функцию (2.12) подставим в систему (2.6) и воспользуемся обозначением (2.11), получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} M_{mn}\gamma_m = \varphi_n, \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots \qquad\qquad (2.13)$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.1. *Управление с минимальной энергией*[6] *представимо в виде* (2.12), *где постоянные* γ_m *образуют решение системы уравнений* (2.13) *и удовлетворяют условию* (2.10).

[6]Если оно существует!

2.3. Решение системы уравнений (2.13). Чтобы доказать существование и единственность решения системы (2.13), перепишем систему в операторной форме:

$$\mathscr{M}\gamma = \varphi, \tag{2.14}$$

где оператор $\mathscr{M}$ определяется матрицей с элементами M_{nm} (см. (2.11)), а $\varphi \in l_2$, поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 < \infty$. Это уравнение можно исследовать изложенными выше вариационными методами.

Определение 2.1. *Множество элементов из l_2 с нормой и скалярным произведением пространства l_2, удовлетворяющих условию $(\mathscr{M}\gamma, \gamma) < \infty$, будем называть пространством l_λ.*

Из (2.11) и того, что $\gamma \in l_\lambda$, находим

$$(\mathscr{M}\gamma, \gamma) = \sum_{n,\, m=1}^{\infty} \gamma_n \gamma_m M_{nm} = \int_0^T \left[\sum_{k=1}^{\infty} r_k \gamma_k \, e^{-a^2 \lambda_k^2 (t-T)} \right]^2 dt \geqslant 0.$$

Равенство нулю выполняется только на нулевом элементе.

Теорема 2.2. *Оператор $\mathscr{M}$ в уравнении (2.14) является положительным, но не положительно определенным в пространстве l_λ.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что оператор $\mathscr{M}$ действует из l_2 в l_2. Пусть $\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots\}$ принадлежит l_2, т. е. выполняется $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty$. Тогда для элемента b, определяемого равенством $b = \mathscr{M}\gamma$, будем иметь

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} \gamma_n \right]^2 \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} M_{mn}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 \right] =$$

$$= \|\gamma\|^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r_m r_n}{a^2(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)} \left(1 - e^{-a^2(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)T} \right) \right]^2 <$$

$$< \|\gamma\|^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r_m r_n}{a^2(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)} \right]^2 \leqslant \frac{\|\gamma\|^2}{2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_m^2}{a^2 \lambda_m^4} \right]^2 = K^2 \|\gamma\|^2.$$

Последнее равенство в этой цепочке справедливо потому, что $\dfrac{\lambda_m}{\pi(m-1)} \to 1$ при $m \to \infty$. Очевидны также два следующих свойства этого оператора.

1°. $\mathscr{M}$ аддитивен и однороден в l_λ, т. е. линеен.
2°. $\mathscr{M}$ ограничен и симметричен в l_λ, т. е. выполняется следующее равенство: $(\mathscr{M}a,\, b) = (a,\, \mathscr{M}b)$ при произвольных a и b из l_λ.

Докажем, что оператор $\mathscr{M}$ действует из l_λ в l_λ. Предположим, что $a \in l_\lambda$ и $b = \mathscr{M}a$. Тогда

$$(b, \mathscr{M}b) = (\mathscr{M}a, \mathscr{M}^2 a) \leqslant \|\mathscr{M}a\| \cdot \|\mathscr{M}^2 a\| \leqslant \|\mathscr{M}\|^3 \|a\|^2 < \infty.$$

Таким образом, оператор $\mathscr{M}$ обладает всеми свойствами положительного оператора в подпространстве l_λ.

Докажем, что он не является положительно определенным, т. е. не существует постоянной $\delta > 0$ такой, что для всех $\gamma \in l_\lambda$ выполняется неравенство

$$(\gamma, \mathscr{M}\gamma) \geqslant \delta \|\gamma\|^2. \tag{2.15}$$

С этой целью возьмем последовательность элементов $\{\gamma^n\}$ таких, что $\gamma^n = \{\overbrace{0, \ldots, 0}^{n-1}, 1, 0 \ldots\}$. Тогда $\|\gamma^n\| = 1$ и

$$(\gamma^n, \mathscr{M}\gamma^n) = \frac{r_n^2}{2a^2\lambda_n^2}\left(1 - e^{-2a^2\lambda_n^2 T}\right) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

что противоречит неравенству (2.15). Теорема доказана.

Используя этот результат, можно определить *энергетическое пространство* $l_{\mathscr{M}}$, порожденное оператором $\mathscr{M}$. Оно состоит из последовательностей типа $a = \{a_n\}$. Скалярное произведение и норма в нем определяются соответственно формулами $[a, b] = (a, \mathscr{M}b)$, $[a] = \sqrt{(a, \mathscr{M}a)}$.

После этого можно применять теоремы о свойствах уравнений с положительным оператором и их решений (см. § 1). Применяя теорему 1.3, получаем следующий важный результат.

Теорема 2.3. *Для того чтобы уравнение* (2.14) *имело решение в энергетическом пространстве* $l_{\mathscr{M}}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная*

$N > 0$, что
$$|(\gamma, \varphi)|^2 \leqslant N(\gamma, \mathscr{M}\gamma) \tag{2.16}$$
для всех $\gamma \in l_{\mathscr{M}}$.[7]

Неравенство (2.16) можно представить в виде
$$\Bigl|\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \gamma_n\Bigr|^2 \leqslant N \sum_{n,\,k=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \gamma_k r_n r_k}{a^2\bigl(\lambda_n^2 + \lambda_k^2\bigr)} \Bigl(1 - e^{-a^2(\lambda_n^2+\lambda_k^2)T}\Bigr)$$
для всех $\gamma \in l_{\mathscr{M}}$. Указать класс элементов $\varphi \in l_2$, для элементов которого справедливо это неравенство, практически не удается. Поэтому воспользуемся достаточным условием (теорема 1.4). С этой целью рассмотрим задачу на собственные элементы и собственные значения: $\mathscr{M}\alpha = \rho\alpha$.

Замечание 2.1. Из теоремы Виета получаем, что след матрицы M, определяющей оператор $\mathscr{M}$, равен сумме его собственных значений: $\operatorname{Sp} M = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n$, но для следа матрицы M справедливо $\operatorname{Sp} M = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 - e^{-2a^2\lambda_n^2 T}}{2a^2\lambda_n^2}\, r_n^2$ и ряд, стоящий в правой части этого равенства, сходится в силу того, что $\lambda_n \sim Cn$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$. Более того, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$.

Применяя теорему 1.4 к рассматриваемому уравнению, легко доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Если правая часть $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ в уравнении* (2.14) *удовлетворяет условию*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n^2}{\rho_n} < \infty, \tag{2.17}$$
то уравнение (2.14) *имеет единственное решение $\gamma = \gamma^0$ в энергетическом пространстве $l_{\mathscr{M}}$.*

Такое решение определяет управление p_0 (см. (2.9)), которое определяет управление с минимальной энергией. Таким образом, справедлива следующая

[7] Здесь выполнено $l_2 \subset l_{\mathscr{M}}$, но не наоборот!

Теорема 2.5. *Если выполнено условие* (2.17), *то управление* p_0 *с минимальной энергией определяется однозначно и может быть представлено в виде следующего ряда:* $p_0(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n^0 r_n e^{-a^2\lambda_n^2(t-T)}$, *где* $\gamma^0 = \{\gamma_1^0, \ldots, \gamma_n^0, \ldots\}$ — *решение уравнения* (2.14).

Представляет интерес также следующее утверждение.

Теорема 2.6. *Если последовательность* $\varphi_n\lambda_n$ *неограничена, то уравнение* (2.14) *не имеет решения в пространстве* $l_{\mathscr{M}}$.

Доказательство. Возьмем последовательность элементов $\{\gamma^n\}$ таких, что $\gamma^n = \Bigl\{\overbrace{0, \ldots, 0}^{n-1}, \dfrac{a\lambda_n}{r_n}, 0, \ldots\Bigr\}$. Так как $(\gamma^n, \mathscr{M}\gamma^n) = \dfrac{1}{2}\left(1 - e^{-2a^2\lambda_n^2 T}\right) < \dfrac{1}{2}$, то $\gamma^n \in l_{\mathscr{M}}$ при любом n.

Справедливо $(\varphi, \gamma^n) = \dfrac{a}{r_n}\varphi_n\lambda_n$, следовательно, не существует постоянной R такой, что условие $(\varphi, \gamma^n) \leqslant R[\gamma^n]$ выполняется при любом натуральном n. Условия теоремы 1.3 не выполняются, и поэтому уравнение (2.14) не имеет решения в энергетическом пространстве $l_{\mathscr{M}}$.

На основе этой простой теоремы можно проанализировать различные задачи об управлении с минимальной энергией и указать достаточные условия, при выполнении которых они не имеют решения. Ясно, что такой результат не может служить инструментом для практического решения конкретных задач. Тем не менее он полезен хотя бы тем, что позволяет «отсеивать» неразрешимые задачи.

Следствие 2.1. *Если выполнены условия теоремы* 2.6, *то задача об управлении с минимальной энергией не имеет решения.*

2.4. Приближенное решение задачи об управлении с минимальной энергией. Полученные результаты позволяют установить ряд полезных свойств приближенных решений задачи об управлении с минимальной энергией. Рассмотрим каждое из них.

Пусть $\varphi^m = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, 0, 0 \ldots\}$ — приближение правой части $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ уравнения (2.14). Тогда наряду с уравнением (2.14) имеем уравнение

$$\mathscr{M}\gamma = \varphi^m. \tag{2.18}$$

Непосредственным следствием теоремы 3.5 является следующее утверждение.

Теорема 2.7. *При выполнении условий теоремы* 2.4 *решение* $\gamma = \gamma^m$ *уравнения* (2.18) *сходится к решению* $\gamma = \gamma^0$ *уравнения* (2.14) *в метрике энергетического пространства* $l_{\mathscr{M}}$ *при* $m \to \infty$.

Учитывая, что соответствующие этим решениям управления определяются формулами:

$$p^0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \gamma_n^0 e^{a^2\lambda_n^2(t-T)}, \qquad p^m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \gamma_n^m e^{a^2\lambda_n^2(t-T)},$$

находим, что верно утверждение.

Следствие 2.2. *При выполнении условий теоремы* 2.4 *справедливо* $\|p^0 - p^m\|_{L_2[0,T]} \to 0$ *при* $m \to \infty$.

Воспользуемся теперь теоремой 2.7. Пусть $\mathscr{P}_i$ — оператор проектирования в $l_{\mathscr{M}}$, а $\rho_1, \ldots, \rho_n, \ldots$ — собственные значения матрицы, определяющей оператор $\mathscr{M}$ и собственные элементы этого оператора — $\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$ Тогда верно $\mathscr{M} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i P_i$. Полагая $\mathscr{M}^n = \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i P_i$, вместе с уравнением (2.14) будем рассматривать уравнение

$$\mathscr{M}^n\gamma = \varphi^n, \tag{2.19}$$

где $\varphi^n = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ и $\varphi_i = (\varphi, \omega_i)$.

Теорема 2.8. *Если оператор* $\mathscr{M}^n$ *является проекцией оператора* $\mathscr{M}$ *на* n*-мерное пространство, порожденное первыми* n *собственными элементами* ω_i, $i = 1, \ldots, n$, *оператора* $\mathscr{M}$, *то решение* $\gamma^n = \{\gamma_1^n, \ldots, \gamma_n^n\}$ *уравнения* (2.19) *сходится в* $l_{\mathscr{M}^n}$ *к решению* $\gamma^0 = \{\gamma_1^0, \ldots, \gamma_n^0, \ldots\}$ *уравнения* (2.14) *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Оператор $\mathscr{M}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.7. Следует лишь обратить внимание на условие (1.11), которое особо отмечается в этой теореме, а в доказываемой теореме оно не указывается. Дело в том, что здесь условие (1.11) выполнено, потому что след матрицы M ограничен (см. замечание 2.1).

Из этой теоремы получаем важное утверждение.

Следствие 2.3. *Управления:*

$$p^n(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i \gamma_i^n e^{a^2\lambda_i^2(t-T)}, \qquad p^0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i \gamma_i^0 e^{a^2\lambda_i^2(t-T)}$$

обладают свойством $\|p^0 - p^n\| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Следующие две теоремы и вытекающие из них следствия характеризуют влияние погрешностей вычисления данных задачи на результаты ее решения.

Теорема 2.9. *Решение уравнения* 2.14 *неустойчиво в* $l_{\mathscr{M}}$ *относительно малых в* $l_{\mathscr{M}}$ *изменений* φ, *т. е. если* γ^0 *и* γ^n *решения уравнений* $\mathscr{M}\gamma = \varphi^0$ *и* $\mathscr{M}\gamma = \varphi^n$ *соответственно, то из того, что* $\|\varphi - \varphi^n\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, *вообще говоря, не следует, что* $[\gamma^0 - \gamma^n] \to 0$.

Чтобы применить этот результат непосредственно к анализу управления с минимальной энергией, следует вспомнить, что компоненты φ_n вектора φ в уравнении $\mathscr{M}\gamma = \varphi$ являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(x)$ из $L_2(0,1)$ (см. (2.8)).

Теперь вместе с задачей минимизации функционала (2.5) при условиях (2.4) рассмотрим ту же задачу, но вместо (2.4) возьмем условие $u(T,x) = \varphi^n(x)$, $\varphi^n(x) \in L_2[0,\,1]$, где $\varphi^n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k X_k(x)$. Соответствующие управления с минимальной энергией обозначим через p^0 и p^n. Тогда можно записать:

$$p^0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i \gamma_i^0 e^{a^2\lambda_i^2(t-T)}, \qquad p^n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i \gamma_i^n e^{a^2\lambda_i^2(t-T)}.$$

Следствие 2.4. *Из того, что выполнено* $\|\varphi - \varphi^n\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, *вообще говоря, не следует, что будет выполняться* $\|p^0(t) - p^n(t)\| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 2.10. *Если существуют такие элементы Φ, Φ^n из l_2, что $\varphi_m = \sqrt{\rho_m}\,\Phi_m$ и $\varphi_m^n = \sqrt{\rho_m}\,\Phi_m^n$, то решения γ и γ^n уравнений* (2.14) *и* (2.19) *соответственно таковы, что $\|\gamma-\gamma^n\|_{H_{\mathscr{M}}} \to 0$ при $n \to \infty$ как только $\|\Phi-\Phi^n\|_{l_2} \to 0$ при $n \to \infty$.*

Существование решений γ^0 и γ^n непосредственно следует из теоремы 2.4. Если существуют Φ и Φ^n из пространства l_2 такие, что выполнено $\varphi_m = \sqrt{\rho_m}\,\Phi_m$ и $\varphi_m^n = \sqrt{\rho_m}\,\Phi_m^n$, то верно равенство $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{\left(\varphi_m - \varphi_m^n\right)^2}{\rho_m} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \left(\Phi_m - \Phi_m^n\right)^2$. Таким образом, если выполняется $\|\Phi-\Phi^n\|_{l_2} \to 0$ при $n \to \infty$, то $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{\left(\varphi_m - \varphi_m^n\right)^2}{\rho_m} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому справедливо $\|\gamma^0 - \gamma^n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Следствие 2.5. *При выполнении условий теоремы* 2.10 *управления p^0 и p^n обладают свойством: $\|p^0-p^n\| \to 0$ при $n \to \infty$.*

В уравнении (2.19) оператор $\mathscr{M}^n$ определяется конечномерной матрицей M^n в пространстве R^n, базисом которого является набор $\omega_1, \ldots, \omega_n$ первых n собственных элементов бесконечномерной матрицы $\{M_{nk}\}$ (см. (2.11)), а собственными значениями являются числа $\rho_1, \ldots, \rho_n$.

При решении практических задач использование оператора $\mathscr{M}^n$ не всегда приемлемо. Более естественно использовать для этой цели оператор $\mathfrak{M}^n$, определяемый матрицей, элементы которой m_{ij} имеют вид $m_{ij} = \dfrac{1}{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Поэтому для приближенного решения уравнения (2.19) используется уравнение

$$\mathfrak{M}^n \gamma = \mathfrak{f}^n.$$

Записывая оператор $\mathscr{M}^n$ в виде $\mathscr{M}^n = \mathfrak{M}^n + \mathscr{G}^n$, можно воспользоваться теоремой 4.8 для характеристики приближенного решения уравнения (2.19).

В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос об использовании регуляризации в задаче об управлении с минимальной энергией.

2.5. Использование штрафных функций. В § 3 рассмотрена краевая задача

$$\frac{\partial u(x,\,t)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u(t,\,x)}{\partial x^2} = 0, \qquad (t,\,x) \in Q;$$

$$u(0,\,x) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

$$u_x(t,\,0) = 0, \quad u_x(t,\,1) + \alpha\big[u(t,\,1) - p(t)\big] = 0, \qquad t \geqslant 0.$$

Критерием оптимальности выбран функционал

$$J[p] = \int\limits_0^1 \big[u(T,\,x) - \varphi(x)\big]^2\,dx + \beta\int\limits_0^T \big[p(t)\big]^2\,dt,$$

в котором момент времени $t = T$ фиксирован, а $\varphi(x)$ — заданная функция из $L_2[0,\,1]$. Метод решения этой задачи можно использовать как один из способов приближенного решения задачи об управлении с минимальной энергией. При таком построении приближенного решения условие $u(T,x) = \varphi(x)$ заменяется слагаемым $\int\limits_0^1 \big[u(T,\,x) - \varphi(x)\big]^2\,dx$, которое вносится в критерий оптимальности, и задача решается при использовании последовательности убывающих малых значениях $\beta = \beta_n$. В теории штрафных функций доказывается, что такая процедура устойчива относительно погрешностей вычислений.

В § 3 доказано, что оптимальное управление в этой задаче является решением интегрального уравнения:

$$\beta p(t) + \int\limits_0^T \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\,q_n(\tau)p(\tau)\,d\tau = f(t),$$

в котором:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n q_n(t); \quad K(t,\,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\,q_n(\tau);$$

$$q_n(t) = a^2\alpha X_n(1)e^{a^2\lambda_n^2(t-T)}.$$

Решение этого уравнения ищется в виде

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n r_n e^{a^2\lambda_n^2(t-T)},$$

где $r_n = a^2\alpha X_n(1)$ (см. (2.9)). В результате для определения коэффициентов γ_n получается бесконечная система алгебраических уравнений

$$\beta\gamma_k + \sum_{n=1}^{\infty} M_{kn}\gamma_n = \varphi_n,$$

в которой

$$M_{kn} = \frac{r_k\, r_n}{\lambda_k^2 + \lambda_n^2}\left(1 - e^{-a^2(\lambda_k^2+\lambda_n^2)T}\right).$$

Если воспользоваться обозначениями (2.11), то эту систему можно записать в виде

$$\beta\gamma + \mathscr{M}\gamma = \varphi. \tag{2.20}$$

Оператор $\beta E + \mathscr{M}$ является положительно определенным в пространстве l_2. Значит, это уравнение однозначно разрешимо в энергетическом пространстве этого оператора при любом положительном β. Обозначим решение через $\gamma(\beta)$ и будем рассматривать вопрос о связи этого решения с решением γ^0 уравнения $\mathscr{M}\gamma = \varphi$ (см. (2.14)).

Теорема 2.11. Если уравнение $\mathscr{M}\gamma = \varphi$ имеет решение γ^0 в пространстве $H_{\mathscr{M}}$, а $\gamma(\beta)$ — решение уравнения (2.20), то

$$\lim_{\beta\to 0}[\gamma^0 - \gamma(\beta)]_{\mathscr{M}} = 0.$$

Доказательство следует непосредственно из теоремы 4.9.

Глава 5

Динамическое программирование

Динамическое программирование — один из наиболее распространенных методов решения задач об оптимальном управлении системами с сосредоточенными параметрами. Его основное достоинство состоит в том, что этим методом оптимальное управление находится как функция состояния системы, т. е. решается задача синтеза оптимального управления. Однако при решении задач большой размерности (состояние системы определяется вектором большой размерности) вычислительные затруднения оказываются настолько значительными, что задача построения оптимального управления может оказаться практически неразрешимой. Это явление в фольклоре математиков получило название «проклятие размерности».

В этой главе рассмотрим применение динамического программирования к системам с распределенными параметрами. Наиболее важным фактом в этой теории является то, что уравнения Беллмана для таких систем удается получить, лишь используя теорию обобщенных решений уравнений с частными производными.

1. Принцип оптимальности Беллмана

Сначала рассмотрим применение динамического программирования к задачам оптимального управления конечномерными системами. Пусть процесс описывается уравнениями:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t,\, x_1,\, \ldots,\, x_n,\, u), \qquad i = 1,\, \ldots,\, n. \tag{1.1}$$

Допустимыми управлениями будем считать такие векторные функции $u = u(t) = \{u_1(t), \ldots, u_n(t)\}$, каждая компонента которых кусочно непрерывна с конечным числом точек разрыва. Если X_i, удовлетворяют условиям теоремы Коши при каждом конкретном управлении, то решение $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, этой системы при конкретном управлении и при $t > t_0$ определяется исключительно начальными условиями:

$$x_i(t_0) = x_i^0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности Беллмана[1].

Пусть допустимые управления $u = u(t)$ кусочно непрерывны по t, принимают значения в области G, т. е. выполнено $u \in G$. Пусть

$$J[u] = \int\limits_{t_0}^{T} F(s, x(s), u(s))\, ds, \qquad x = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

— критерий оптимальности и $J = J[u] \geqslant 0$.

Принцип оптимальности Беллмана. *Если процесс оптимален по критерию $J = J[u]$ и система переведена в состояние $x(\tau)$, то при $t > \tau$ оптимальная по критерию*

$$J_\tau[u] = \int\limits_{t_0}^{T} G(s, x(s), u(s))\, ds$$

траектория системы определяется исключительно состоянием системы $x(\tau)$ в момент времени $t = \tau$.

Пусть $J = J[u] = \int\limits_0^T F(t, x_1, \ldots, x_n, u)\, dt$. При каждом конкретном u находим решение $x = x(t)$ системы (1.1) при $u = u(t)$ с начальными условиями (1.2). Введем обозначение:

$$S\,[t, x(t)] = \min_{\substack{u(\tau)\in G\\ t\leqslant\tau\leqslant T}} \int\limits_t^T F(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau), u(\tau))\, d\tau.$$

[1]Этот принцип еще называют принципом Беллмана–Айзекса.

Здесь минимум берется по всем u из G, а область определения не весь отрезок $[0,\, T]$, а отрезок $[t,\, T]$. Тогда, согласно принципу оптимальности,

$$S\,[t,\, x(t)] = \min_{\substack{u(\tau)\in G\\ t\leqslant\tau\leqslant T}} \Bigl\{ \int\limits_t^{t+\Delta t} F(\tau,\, x_1,\, \ldots,\, x_n,\, u)\, d\tau + \\ + \min_{\substack{u(\tau)\in G\\ t+\Delta t\leqslant\tau\leqslant T}} \int\limits_{t+\Delta t}^{T} F(\tau,\, x_1,\, \ldots,\, x_n,\, u)\, d\tau \Bigr\}.$$

Следовательно, с учетом введенного обозначения, получаем равенство

$$S\,[t,\, x(t)] = \min_{\substack{u(\tau)\in G\\ t\leqslant\tau\leqslant T}} \Bigl\{ \int\limits_t^{t+\Delta t} F(\tau,\, x_1,\, \ldots,\, x_n,\, u)\, d\tau + \\ + S\,[t+\Delta t,\, x(t+\Delta t)] \Bigr\}. \quad (1.3)$$

Поскольку $x_i(t+\Delta t) = x_i(t) + \dfrac{dx_i(t)}{dt}\,\Delta t + o(\Delta t)$, то

$$S\,[t+\Delta t,\, x(t+\Delta t)] = S\,[t,\, x(t)] + \frac{\partial S\,[t,\, x(t)]}{\partial t}\,\Delta t + \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S\,[t,\, x(t)]}{\partial x_i}\, \frac{dx_i(t)}{dt}\,\Delta t + o(\Delta t).$$

Окончательно получаем из системы (1.1)

$$S\,[t+\Delta t,\, x(t+\Delta t)] = S\,[t,\, x(t)] + \frac{\partial S\,[t,\, x(t)]}{\partial t}\,\Delta t + \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S\,[t,\, x(t)]}{\partial x_i}\, X_i(t,\, x_1,\, \ldots,\, x_n,\, u)\,\Delta t + o(\Delta t). \quad (1.4)$$

Правую часть равенства (1.4) подставим в выражение (1.3), находим

$$-\frac{\partial S\,[t,\, x(t)]}{\partial t}\,\Delta t = \min_{\substack{u(\tau)\in G\\ t\leqslant\tau\leqslant T}} \Bigl\{ \int\limits_t^{t+\Delta t} F(\tau,\, x(\tau),\, u(\tau))\, d\tau + \\ + \Bigl(\operatorname{grad} S,\, X\bigl(t,\, x(t),\, u(t)\bigr)\Bigr)\,\Delta t + o(\Delta t) \Bigr\}.$$

Полученное равенство поделим на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. В итоге будем иметь

$$- \frac{\partial S\,[t,\, x(t)]}{\partial t} = \min_{u \in G} \Big\{ F\big(t,\, x(t),\, u(t)\big) + \\ + \Big(\operatorname{grad} S, X\big(t,\, x(t),\, u(t)\big)\Big)\Big\}.$$

Следовательно, пара вектор-функций $(x(t), u(t))$ образуют решение уравнения

$$-\frac{\partial S\,[t,\, x]}{\partial t} = \min_{u \in G} \Big\{ F\big(t,\, x,\, u\big) + \Big(\operatorname{grad} S, X\big(t,\, x,\, u\big)\Big)\Big\}. \quad (1.5)$$

Полученное уравнение (1.5) называется *уравнением Беллмана*.

2. Задача об оптимальной стабилизации

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^{r} b_{ij} u_j, \qquad i = 1,\, \ldots,\, n. \quad (2.1)$$

Систему (2.1) запишем в матричном виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu. \quad (2.2)$$

В качестве области допустимых управлений возьмем все пространство $\mathbb{R}^r$. Матрицы A и B постоянны. Критерием оптимальности является функционал[2]

$$J[u] = \int_0^\infty x^*(t)\, Q\, x(t)\, dt + \beta \int_0^\infty u^*(t)\, P\, u(t)\, dt, \quad (2.3)$$

где Q — постоянная, неотрицательная, симметричная матрица; P — постоянная, положительная, симметричная матрица.

[2] Далее с помощью символа «$*$» обозначается транспонированная матрица или транспонированный вектор.

Пример 2.1. Пусть управляемый процесс описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u_2, \end{cases}$$

а критерием оптимальности является функционал

$$J[u] = \int\limits_0^\infty [x_1(t)]^2\,dt + \int\limits_0^\infty [u_1^2(t) + u_2^2(t)]\,dt.$$

Здесь $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вернемся к системе (2.1) или (2.2).

Задача 2.1. *Найти такое управление u, чтобы для него тривиальное решение системы* (2.2) *было асимптотически устойчиво и при этом функционал J вида* (2.3) *достигал минимального значения.*

Для рассматриваемой системы и критерия оптимальности уравнение Беллмана примет следующий вид:

$$-\frac{\partial S\,[t,\,x]}{\partial t} = \min_{u\in\mathbb{R}^r}\Big\{x^*Q\,x + \beta\,u^*P\,u + \big(\operatorname{grad} S,\ Ax + Bu\big)\Big\}.$$

Поскольку система автономна, то минимальное значение не зависит от t, следовательно, уравнение Беллмана можно переписать в виде

$$\min_{u\in\mathbb{R}^r}\Big\{x^*Q\,x + \beta\,u^*P\,u + \big(\operatorname{grad} S,\ Ax + Bu\big)\Big\} = 0. \qquad (2.4)$$

Найдем минимум выражения $\beta u^*P\,u + \big(\operatorname{grad} S,\ B\,u\big)$. Перепишем его в координатной форме:

$$\beta \sum_{i,\,k=1}^{r} p_{ik}u_i\,u_k + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_l} \sum_{i=1}^{r} b_{li}u_i$$

и воспользуемся необходимым условием существования экстремума:

$$2\beta\sum_{k=1}^{r}p_{ik}u_k+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_l}\,b_{li}=0,\qquad i=1,\,\ldots,\,r.$$

Полученные равенства в матричной форме имеют следующий вид: $2\beta Pu+B^*\dfrac{\partial S}{\partial x}=O$. Откуда найдем управление u:

$$u=-\frac{1}{2\beta}\,P^{-1}B^*\frac{\partial S}{\partial x}. \tag{2.5}$$

Выражение (2.5) подставим в уравнение Беллмана (2.4), приходим к равенству[3]

$$x^*Qx+\Bigl(\frac{\partial S}{\partial x}\Bigr)^*Ax-\frac{1}{4\beta}\Bigl(\frac{\partial S}{\partial x}\Bigr)^*BP^{-1}B^*\frac{\partial S}{\partial x}=0. \tag{2.6}$$

Предположим, что $S[x]$ — квадратичная форма, т. е. $S[x]$ имеет вид $S[x]=x^*Kx$, тогда $\dfrac{\partial S}{\partial x}=2Kx$. Следовательно, от уравнения (2.6) приходим к следующему матричному уравнению:

$$-\frac{1}{\beta}\,KBP^{-1}B^*K+2KA+Q=O. \tag{2.7}$$

Здесь учтено, что K — симметричная матрица. Найденное уравнение (2.7) называется *матричным уравнением Риккати*.

Решая уравнение Риккати, находим неизвестную матрицу K, вставим ее в выражение (2.5), $u=-\dfrac{1}{\beta}\,P^{-1}B^*Kx$. Если найденное управление подставим в систему (2.2), то получим систему дифференциальных линейных однородных уравнений, определяющих оптимальный процесс.

Замечание 2.1. Если вместо функционала (2.3) ввести функционал

$$J[u]=\int\limits_0^T x^*(t)\,Q\,x(t)\,dt+\beta\int\limits_0^T u^*(t)\,P\,u(t)\,dt,$$

[3]Использовали свойство матрицы P — ее симметричность.

где T — конечный момент времени, то решение будет зависеть от t и $\dfrac{\partial S}{\partial t} \not\equiv 0$, а тем самым и $K = K(t)$. Тогда вместо алгебраического уравнения Риккати получим дифференциальное уравнение Риккати:

$$\frac{dK}{dt} - \frac{1}{\beta} KBP^{-1}B^*K + 2KA + Q = O.$$

3. Динамическое программирование для систем с распределенными параметрами

Будем рассматривать процесс, который описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\,x) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\,x) + f(t,\,x) + v(t,\,x),\ (x,\,t) \in Q, \quad (3.1)$$

с граничными условиями при $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$\frac{\partial u(t,\,0)}{\partial x} = 0,\ \ \frac{\partial u(t,\,1)}{\partial x} + \alpha[u(t,\,1) - p(t)] = 0, \qquad (3.2)$$

здесь обозначено $Q = \{(x,\,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$, а функция f задана и принадлежит $L_2(Q)$, функции v и p — управления. При этом считаем, что это задача с начальными данными

$$u(0,\,x) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad (3.3)$$

имеет решение, которое удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\int\limits_0^1 \big[\psi(t,\,x)u(t,\,x)\big]\Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^1 \Big[u(t,\,x)\,\frac{\partial\psi(t,\,x)}{\partial t} -$$
$$- a^2\frac{\partial u(t,\,x)}{\partial x}\frac{\partial\psi(t,\,x)}{\partial x} + [f(t,\,x) + v(t,\,x)]\psi(t,\,x)\Big]\,dx\,dt +$$
$$+ a^2\alpha\int\limits_{t_1}^{t_2}[u(t,\,1) - p(t)]\psi(t,\,1)\,dt \equiv 0, \quad (3.4)$$

для всех $0 < t_1 < t_2 < T$ и всех функций $\psi \in W_2^{(1,\,1)}(Q)$.

Для решения задачи нам потребуются некоторые сведения из функционального анализа.

3.1. Вспомогательные сведения. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и $F = F(x)$ — некоторый функционал на H.

Определение 3.1. *Дифференциалом Фреше* функционала F в точке x_0 называется линейный по h функционал $\omega(x_0,\, h)$ такой, что $F(x_0+h) - F(x_0) = \omega(x_0,\, h) + o(h)$, где $\dfrac{|o(h)|}{\|h\|} \to 0$ при $\|h\| \to 0$.

Поскольку дифференциал Фреше линейный по h функционал в гильбертовом пространстве, то по теореме Рисса существует такой элемент пространства H, обозначим его $F'(x_0)$, что $\omega(x_0,\, h) = \big(F'(x_0),\, h\big)$. Элемент $F'(x_0)$ называется *производной Фреше* или *градиентом* функционала F в точке x_0.

Пример 3.1. Пусть $F = F(x_1,\, \ldots,\, x_n)$ — скалярная функция n переменных, дифференцируемая в фиксируемой точке $x^0 = \big(x_1^0,\, \ldots,\, x_n^0\big)$. Тогда если $h = (h_1,\, \ldots,\, h_n)$, то $F(x^0+h) - F(x^0) = (A,\, h) + o(h)$, где

$$A = \operatorname{grad} F(x^0) = \Big(\frac{\partial F(x^0)}{\partial x_1},\, \ldots,\, \frac{\partial F(x^0)}{\partial x_n}\Big).$$

Для функционала F справедлива формула Лагранжа: существует такое число $0 < \theta < 1$, что верно равенство

$$F(x_0+h) - F(x_0) = (F'(x_0+\theta h), h).$$

3.2. Вывод уравнения Беллмана. Предположим, что в задаче (3.1)–(3.3) выполняется тождество $p(t) \equiv 0$, функция $v = v(t,x)$ — управление, а функция $u = u(t,x)$ — соответствующее ему решение краевой задачи.

В каждый момент времени τ функция $u = u(\tau,\, x)$ переменной x определяет поведение системы при $t > \tau$ в соответствии с теоремой существования и единственности решения краевой задачи.

На управляющую функцию $v \in L_2(Q)$ могут быть наложены дополнительные условия, например:
1) $v(t,\, x) = w(t)g(x)$, функция g задана, а w — управление;
2) функция v почти всюду в $L_2(Q)$ удовлетворяет неравенству $|v(t,\, x)| \leqslant M$.

Таким образом, управления v, удовлетворяющие заданным условиям, называются *допустимыми*, и будем писать $v \in G(t, x) \subset L_2(Q)$.

Пусть критерием оптимальности является функционал

$$J = \int_0^T F\big(t, x, u(t, x), v(t, x)\big)\, dt,$$

где F — заданная функция переменной t и является функционалом, определенным на функциях $u(t, x)$ и $v(t, x)$.

В частности, J может быть задан следующим образом:

$$\widetilde{J} = \int_0^T \int_0^1 F_1\big(t, x, u(t, x), v(t, x)\big)\, dx\, dt,$$

где F_1 — функция из $L_2(Q)$.

Принцип оптимальности Беллмана формулируется в том же самом виде, как и для конечномерных систем.

Принцип оптимальности Беллмана. *Оптимальная по критерию J функция $u = u(t, x)$ обладает тем свойством, что каково бы ни было ее состояние $u = u(\tau, x)$, функция $u = u(t, x)$ при $t > \tau$ должна быть оптимальна по критерию*

$$J = \int_\tau^T F\big(s, x, u(s, x), v(s, x)\big)\, ds.$$

Обозначим

$$S\big[t, u(t, x)\big] = \min_{v(t, x) \in G(t, x)} \Big\{ \int_t^T F\big(s, x, u(s, x), v(s, x)\big)\, ds \Big\}$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$S\big[t, u(t, x)\big] = \min_{v(t, x) \in G(t, x)} \Big\{ \int_t^{t+\Delta t} F\big(s, x, u(s, x), v(s, x)\big)\, ds + \\ + \int_{t+\Delta t}^T F\big(s, x, u(s, x), v(s, x)\big)\, ds \Big\} =$$

$$= \min_{v(t,\,x)\in G(t,\,x)} \left\{ \int\limits_{t}^{t+\Delta t} F\bigl(s,\,x,\,u(s,\,x),\,v(s,\,x)\bigr)\,ds + \right.$$

$$\left. + \min_{v(t+\Delta t,\,x)\in G(t+\Delta t,\,x)} \left\{ \int\limits_{t+\Delta t}^{T} F\bigl(s,\,x,\,u(s,\,x),\,v(s,\,x)\bigr)\,ds \right\} \right\} =$$

$$= \min_{v(t,\,x)\in G(t,\,x)} \left\{ \int\limits_{t}^{t+\Delta t} F\bigl(s,\,x,\,u(s,\,x),\,v(s,\,x)\bigr)\,ds + \right.$$

$$\left. + S\bigl[t+\Delta t,\,u(t+\Delta t,\,x)\bigr] \right\}. \quad (3.5)$$

Заметим, что $S\bigl[t+\Delta t,\,u(t+\Delta t,\,x)\bigr]$ есть функционал по u и скалярная функция по t. Введем следующее обозначение: $\Delta u(t,\,x) = u(t+\Delta t,\,x) - u(t,\,x)$. Тогда

$$\Delta u(t,\,x) = \frac{\partial u(t,\,x)}{\partial t}\,\Delta t + o(\Delta t).$$

Получим выражение для $S\bigl[t+\Delta t,\,u(t+\Delta t,\,x)\bigr]$, при этом будем опускать аргумент $(t,\,x)$ у функции u:

$$S\bigl[t+\Delta t,\,u(t+\Delta t,\,x)\bigr] = S\bigl[t+\Delta t,\,u+\Delta u\bigr] = S\bigl[t,\,u+\Delta u\bigr] +$$

$$+ \frac{\partial S\bigl[t,\,u+\Delta u\bigr]}{\partial t}\,\Delta t + o_1(\Delta t) = S\bigl[t,\,u+\Delta u\bigr] + \frac{\partial S\bigl[t,\,u\bigr]}{\partial t}\,\Delta t +$$

$$+ \left[\frac{\partial S\bigl[t,\,u+\Delta u\bigr]}{\partial t} - \frac{\partial S\bigl[t,\,u\bigr]}{\partial t}\right]\Delta t + o_1(\Delta t). \quad (3.6)$$

Далее заметим, что

$$S\bigl[t,\,u+\Delta u\bigr] = S\bigl[t,\,u\bigr] + \omega(t,\,\Delta u) + o_2(t,\,\Delta u), \quad (3.7)$$

а с учетом (3.5) $o_2(t,\,\Delta u) = \widetilde{o}_2\Bigl(t,\,\dfrac{\partial u}{\partial t}\,\Delta t\Bigr) = o_3(\Delta t)$, поскольку $\dfrac{\Bigl|\widetilde{o}_2\Bigl(t,\,\dfrac{\partial u}{\partial t}\,\Delta t\Bigr)\Bigr|}{\Delta t} \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Таким образом, выражение (3.7) перепишем в следующем виде:

$$S\bigl[t,\,u+\Delta u\bigr] = S\bigl[t,\,u\bigr] + \omega(t,\,\Delta u) + o_3(\Delta t). \quad (3.8)$$

Второе слагаемое в правой части равенства (3.6), согласно формуле Лагранжа для функционалов, примет вид

$$\frac{\partial S\big[t,\,u+\Delta u\big]}{\partial t}-\frac{\partial S\big[t,\,u\big]}{\partial t}=\Phi(t,\,u+\theta\Delta u,\,\Delta u). \qquad (3.9)$$

Окончательно, используя выражения (3.8) и (3.9), равенство (3.7) представим следующим образом:

$$S\big[t+\Delta t,\,u(t+\Delta t),\,x)\big]=S\big[t,\,u\big]+\frac{\partial S\big[t,\,u\big]}{\partial t}\,\Delta t+ \\ +\omega(t,\,\Delta u)+\Phi(t,\,u+\theta\Delta u,\,\Delta u)\,\Delta t+o(\Delta t).$$

Полученное выражение подставим в (3.5):

$$S\big[t,\,u\big]=\min_{v(t,\,x)\in G(t,\,x)}\Big\{\int\limits_t^{t+\Delta t}F\big(s,\,x,\,u(s,\,x),\,v(s,\,x)\big)\,ds+ \\ +S\big[t,\,u\big]+\frac{\partial S\big[t,\,u\big]}{\partial t}\,\Delta t+\omega(t,\,\Delta u)+ \\ +\Phi(t,\,u+\theta\Delta u,\,\Delta u)\,\Delta t+o(\Delta t)\Big\}.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$-\frac{\partial S\big[t,\,u\big]}{\partial t}\,\Delta t=\min_{v\in G}\Big\{\int\limits_t^{t+\Delta t}F\big(s,\,x,\,u(s,\,x),\,v(s,\,x)\big)\,ds+ \\ +\omega(t,\,\Delta u)+\Phi(t,\,u+\theta\Delta u,\,\Delta u)\,\Delta t+o(\Delta t)\Big\}. \qquad (3.10)$$

Обратимся к функционалу $\omega(t,\,\Delta u)$, по определению дифференциала Фреше получаем

$$\omega(t,\,\Delta u)=\big(S'_x\big[t,\,u\big],\,\Delta u\big)_{L_2[0,\,1]}=\big(\psi(t,\,x),\,\Delta u\big)_{L_2[0,\,1]}= \\ =\int\limits_0^1\psi(t,\,x)\Delta u(t,\,x)\,dx=\int\limits_0^1\psi(t,\,x)\big[u(t+\Delta t,\,x)-u(t,\,x)\big]\,dx= \\ =\int\limits_0^1\big[\psi(t,x)u(t,x)\big]\Big|_t^{t+\Delta t}dx-\int\limits_0^1\big[\psi(t+\Delta t,x)-\psi(t,x)\big]\,u(t+\Delta t,x)dx.$$

Теперь воспользуемся тождеством (3.4), в котором положим $t_1 = t$ и $t_2 = t + \Delta t$:

$$\omega(t,\, \Delta u) = \int\limits_t^{t+\Delta t} \int\limits_0^1 \Big[u(t,\, x)\, \frac{\partial \psi(t,\, x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial u(t,\, x)}{\partial x}\, \frac{\partial \psi(t,\, x)}{\partial x} +$$

$$+ [f(t,\, x) + v(t,\, x)]\, \psi(t,\, x)\Big]\, dx\, dt - a^2\alpha \int\limits_t^{t+\Delta t} u(t,\, 1)\psi(t,\, 1)\, dt -$$

$$- \int\limits_0^1 [\psi(t + \Delta t,\, x) - \psi(t,\, x)] u(t + \Delta t,\, x)\, dx. \quad (3.11)$$

Поскольку функционал Φ линеен по Δu (см. определение 3.1 дифференциала Фреше), а в силу выражения (3.5) выполняется $\Delta u \to 0$ при $\Delta t \to 0$, то справедливо асимптотическое выражение $\Phi(t,\, u + \theta\Delta u,\, \Delta u) \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Выражение (3.11) подставим в (3.10), поделим на Δt и устремим Δt к нулю, получаем следующее равенство:

$$- \frac{\partial S\big[t,\, u(t,\, x)\big]}{\partial t} =$$

$$= \min_{v(t,\,x) \in G(t,\,x)} \Big\{ F\big(t,\, x,\, u(t,\, x),\, v(t,\, x)\big) - a^2\alpha u(t,\, 1)\, \psi(t,\, 1) -$$

$$- \int\limits_0^1 \Big[a^2 \frac{\partial u(t,\, x)}{\partial x} \frac{\partial \psi(t,\, x)}{\partial x} - [f(t,\, x) + v(t,\, x)]\, \psi(t,\, x)\Big]\, dx \Big\}.$$

Таким образом, функционал $S[t, u]$ является решением следующего *уравнения Беллмана* для рассматриваемой задачи[4]:

$$- \frac{\partial S\big[t,\, u\big]}{\partial t} = \min_{v \in G} \Big\{ F\big(t,\, x,\, u,\, \big) - a^2\alpha\, u(t,\, 1)\, \psi(t,\, 1) -$$

$$- \int\limits_0^1 \Big[a^2 \frac{\partial u(t,\, x)}{\partial x} \frac{\partial \psi(t,\, x)}{\partial x} - [f(t,\, x) + v]\, \psi(t,\, x)\Big]\, dx \Big\}.$$

[4]Напомним, что в краевой задаче (3.1)–(3.2) мы предположили, что $p(t) \equiv 0$.

Замечание 3.1. Если функция $v = v(t, x)$, например, не является гладкой, то решение рассматриваемой краевой задачи $u = u(t, x)$, представимое рядом Фурье, нельзя дифференцировать по переменной t, так как в этом случае получим расходящийся ряд. Дифференцировать по переменной x один раз этот ряд можно.

Что касается функционала S, то он имеет производную Фреше по переменной x и по переменной t.

Теперь рассмотрим краевую задачу (3.1)–(3.2), в которой положим $f \equiv 0$ и $v \equiv 0$, а функция $p = p(t)$ является управлением. Критерий оптимальности для этой задачи: $\int\limits_0^T F\big(s, x, u(s, x), p(s)\big)\, ds$. В этом случае *уравнение Беллмана* принимает следующий вид:

$$-\frac{\partial S\big[t, u(t, x)\big]}{\partial t} = \min_{p\in G}\Big\{F\big(t, x, u(t, x), p\big)-$$
$$-a^2\int\limits_0^1 \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x}dx - a^2\alpha\big[u(t, 1)-p\big]\psi(t,1)\Big\}. \quad (3.12)$$

4. Динамическое программирование в задаче об аналитическом конструировании регуляторов

Методом динамического программирования найдем решение следующей задачи, называемой *задачей об аналитическом конструировании регулятора*.

Задача 4.1. *Пусть*

$$\begin{gathered} u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), \qquad (t, x) \in Q; \\ u_x(t,0)=0,\ u_x(t,1)+\alpha\big[u(t,1)-p(t)\big]=0,\ 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(0, x) = \varPhi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{gathered} \quad (4.1)$$

здесь $\alpha > 0$, функция $\varPhi$ принадлежит $L_2[0,1]$, а функция p принадлежит пространству $L_2[0, T]$.

Найти управляющую функцию $p = p(t)$, *на которой функционал* $J[p] = \int\limits_0^1 u^2(T,\, x)\, dx + \beta \int\limits_0^T p^2(t)\, dt$, $\beta > 0$, *достигает наименьшего значения.*

Для решения задач вводим функционал

$$S[t, u(t,x)] = \min_{\substack{p(\tau)\\ t\leqslant\tau\leqslant T}} \left[\int\limits_0^1 u^2(T,x)\, dx + \beta \int\limits_t^T p^2(\tau)\, d\tau \right].$$

Повторяя все преобразования, что проводились в общем случае в предыдущем параграфе, приходим к следующему уравнению Беллмана (см. уравнение (3.12)):

$$-\frac{\partial S\big[t,\, u(t,\, x)\big]}{\partial t} = \min_{p(t)} \Big\{ \beta p^2(t) + \alpha a^2 \big[p(t) - u(t,\, 1)\big]\, \psi(t,\, 1) - \\ - a^2 \int\limits_0^1 \frac{\partial u(t,\, x)}{\partial x} \frac{\partial \psi(t,\, x)}{\partial x}\, dx \Big\}, \quad (4.2)$$

здесь ψ — производная Фреше функционала $S\big[t,\, u(t,\, x)\big]$. Кроме того, функционал S должен удовлетворять условию

$$S[T, u(t,x)] = \int\limits_0^1 u^2(T,x)\, dx. \quad (4.3)$$

Производная по p полученного равенства дает функцию p, на которой достигается минимум правой части (4.2):

$$p(t) = -\frac{\alpha\, a^2}{2\beta}\, \psi(t,\, 1). \quad (4.4)$$

Найденное выражение (4.4) для p подставим в правую часть уравнения Беллмана (4.2):

$$-\frac{\partial S\big[t,\, u(t,\, x)\big]}{\partial t} = -\frac{\alpha^2 a^4}{4\beta}\, \psi^2(t,\, 1) - \alpha\, a^2 u(t,\, 1)\, \psi(t,\, 1) - \\ - a^2 \int\limits_0^1 \frac{\partial u(t,\, x)}{\partial x} \frac{\partial \psi(t,\, x)}{\partial x}\, dx. \quad (4.5)$$

Запишем приращение функционала S:

$$S\bigl[t,\, u(t,\,x)+\gamma\,\chi(t,\,x)\bigr]-S\bigl[t,\,u(t,\,x)\bigr]= \\ =\omega\bigl(t,\,u(t,\,x),\,\chi(t,\,x)\bigr)+o(\gamma),$$

$$\omega\bigl(t,\,u(t,\,x),\,\chi(t,\,x)\bigr)=\int\limits_0^1\psi(t,\,x)\,\chi(t,\,x)\,dx. \qquad (4.6)$$

4.1. Представление функционала S через решение краевой задачи Риккати. Будем искать S в виде

$$S\bigl[t,\,u\bigr]=\int\limits_0^1\int\limits_0^1K(t,\,x,\,s)\,u(t,\,x)\,u(t,\,s)\,ds\,dx. \qquad (4.7)$$

Замечание 4.1. Поскольку S зависит от двух аргументов t и u, то, дифференцируя S по t, берем производную по t только от ядра K.

Надо найти ядро K. Пусть ядро K обладает свойством симметричности: $K(t,\,s,\,x)=K(t,\,x,\,s)$. Тогда

$$S\bigl[t,\,u(t,\,x)+\gamma\,\chi(t,\,x)\bigr]-S\bigl[t,\,u(t,\,x)\bigr]=$$

$$=\int\limits_0^1\int\limits_0^1K(t,x,s)\bigl[u(t,x)+\gamma\,\chi(t,x)\bigr]\bigl[u(t,s)+\gamma\,\chi(t,s)\bigr]\,ds\,dx-$$

$$-\int\limits_0^1\int\limits_0^1K(t,\,x,\,s)\,u(t,\,x)\,u(t,\,s)\,ds\,dx=$$

$$=\gamma\int\limits_0^1\int\limits_0^1K(t,x,s)\bigl\{u(t,s)\chi(t,x)+u(t,x)\chi(t,s)\bigr\}\,dsdx+o(\gamma)=$$

$$=2\gamma\int\limits_0^1\int\limits_0^1K(t,\,x,\,s)\,u(t,\,s)\,\chi(t,\,x)\,ds\,dx+o(\gamma).$$

При $\gamma=1$ из (4.6) находим

$$\psi(t,\,x)=2\int\limits_0^1K(t,\,x,\,s)\,u(t,\,s)\,ds. \qquad (4.8)$$

Выражения (4.7) и (4.8) подставим в (4.5), учитывая замечание 4.1:

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1\int_0^1 K_t(t,\,x,\,s)\,u(t,\,x)\,u(t,\,s)\,ds\,dx &= \\
= -\frac{\alpha^2a^4}{\beta}\int_0^1 K(t,\,1,\,s)\,u(t,\,s)\,ds \int_0^1 K(t,\,1,\,\zeta)\,u(t,\,\zeta)\,d\zeta &- \\
-\,2a^2\int_0^1 u_x(t,\,x)\int_0^1 K_x(t,\,x,\,s)\,u(t,\,s)\,ds\,dx &- \\
-\,2\alpha\,a^2\int_0^1 K(t,\,1,\,s)\,u(t,\,s)\,u(t,\,1)\,ds. &\quad (4.9)
\end{aligned}
$$

Обозначим $K_1(t,\,s,\,\zeta) = K(t,\,1,\,s)\,K(t,\,1,\,\zeta)$. Кроме того, имеем

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 u_x(t,\,x)\int_0^1 K_x(t,\,x,\,s)\,u(t,\,s)\,ds\,dx &= \\
= \int_0^1 K_x(t,\,x,\,s)\,u(t,\,s)\,u(t,\,x)\Big|_{x=0}^{x=1}ds &- \\
-\int_0^1\int_0^1 K_{xx}(t,\,x,\,s)\,u(t,\,s)\,u(t,\,x)\,ds\,dx&.
\end{aligned}
$$

Все это учтем в выражении (4.9):

$$
\int_0^1\int_0^1 u(t,\,x)\,u(t,\,s)\Big[-K_t(t,\,x,\,s) + \frac{\alpha^2a^4}{\beta}K_1(t,\,x,\,s) -
$$

$$
-2a^2K_{xx}(t,\,x,\,s)\Big]\,ds\,dx = -2\alpha\,a^2\int_0^1 K(t,\,1,\,s)\,u(t,s)\,u(t,1)\,ds -
$$

$$- 2a^2 \int\limits_0^1 K_x(t,\, 1,\, s) u(t,\, s)\, u(t,\, 1)\, ds +$$

$$+ 2a^2 \int\limits_0^1 K_x(t,\, 0,\, s) u(t,\, s)\, u(t,\, 0)\, ds.$$

Для определения функции K положим

$$K_t(t,\, x,\, s) + 2a^2 K_{xx}(t,\, x,\, s) - \frac{\alpha^2 a^4}{\beta} K_1(t,\, x,\, s) = 0; \quad (4.10)$$

и для всех $u(t,\, s)$ выполняются равенства:

$$K_x(t,\, 0,\, s) = 0; \quad (4.11)$$

$$K_x(t,\, 1,\, s) + \alpha K(t,\, 1,\, s) = 0. \quad (4.12)$$

Поскольку

$$S\big[t,\, u(t,\, x)\big] = \min_{\substack{p(\tau) \\ t \leqslant \tau \leqslant T}} \Big\{ \beta \int\limits_t^T p^2(t)\, dt + \int\limits_0^1 u^2(T,\, x)\, dx \Big\},$$

а $S\big[T,\, u(t,\, x)\big] = \int\limits_0^1 u^2(T,\, x)\, dx$ и $S\big[t,\, u(t,\, x)\big]$ имеет вид (4.7), то

$$K(T,\, x,\, s) = \delta(x - s). \quad (4.13)$$

Таким образом, для определения функции $K = K(t, x, s)$ получили краевую задачу (4.10)–(4.13), которую называют *краевой задачей Риккати*.

4.2. Решение краевой задачи Риккати. Решение полученной задачи (4.10)–(4.13) можно искать в виде ряда по собственным функциям краевой задачи (4.1):

$$K(t,\, x,\, s) = \sum_{n,\, m=1}^{\infty} a_{nm}(t)\, X_n(x) X_m(s), \quad (4.14)$$

где $\{X_n\}$ — ортонормированная система функций краевой задачи[5]:

$$X'' + \lambda^2 X = 0;$$
$$X'(0) = 0, \quad X'(1) + \alpha X(1) = 0.$$

Для нахождения функций $a_{nm}(t)$ подставим ряд (4.14) в уравнение (4.10) и учтем граничные условия (4.11), (4.12). Приравнивая коэффициенты при произведениях функций $X_n(x)\,X_m(s)$, получим бесконечную систему дифференциальных уравнений для $n,\ m = 1,\ 2,\ \ldots$:

$$\frac{da_{nm}}{dt} = a^2\lambda_n^2[a_{nm} + a_{mn}] + \\ + \frac{\alpha^2 a^4}{4\beta}\sum_{ij=1}^{\infty}[a_{ni} + a_{in}][a_{mj} + a_{jm}]X_i(1)X_j(1).$$

Поскольку функция $K(t, x, s)$ симметрична относительно x и s, то $a_{nm} = a_{mn}$. Следовательно, для определения коэффициентов a_{nm} имеем систему в симметричной форме при $n,\ m = 1,\ 2,\ \ldots$:

$$\frac{da_{nm}}{dt} = a^2(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)\,a_{nm} + \frac{\alpha^2 a^4}{\beta}\sum_{ij=1}^{\infty} a_{ni}X_i(1)\,a_{jm}X_j(1).$$

Ее решение должно удовлетворять дополнительным условиям

$$a_{nm}(T) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m, \end{cases}$$

которые непосредственно следуют из (4.13).

Полученные соотношения запишем в матричной форме:

$$\frac{dA}{dt} = a^2\Lambda A + \frac{\alpha^2 a^4}{\beta}\,AX^*(1)X(1)A, \quad A(T) = I, \tag{4.15}$$

где $\Lambda = \{\lambda_m^2 + \lambda_n^2\}_{n,m=1}^{\infty}$, а $X^* = \{X_1,\ X_2,\ \ldots\}^{\mathrm{T}}$. Решение выписанной задачи Коши можно представить в аналитической форме. Для этого обе части полученного уравнения

[5] Вид функций X_n определен в гл. 4 (см. п. 2.2 в § 2).

слева и справа умножим на A^{-1}. В результате получим

$$A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1} = a^2A^{-1}\Lambda + \frac{\alpha^2a^4}{\beta}\,X^*(1)X(1). \qquad (4.16)$$

Так как $AA^{-1} = I$, то $A^{-1}\dfrac{dA}{dt}\,A^{-1} = -\dfrac{dA^{-1}}{dt}$. Поэтому уравнение (4.16) можно записать следующим образом:

$$\frac{dA^{-1}}{dt} + a^2A^{-1}\Lambda + \frac{\alpha^2a^4}{\beta}\,X^*(1)X(1) = 0.$$

Его общее решение представим в виде

$$A^{-1} = C\,e^{-a^2\Lambda(t-T)} - \frac{\alpha^2a^4}{\beta}\,X^*(1)X(1)\Lambda^{-1}.$$

Окончательно находим решение задачи Коши (4.15):

$$A = e^{a^2\Lambda(t-T)}\left[I + \frac{\alpha^2a^4}{\beta}X^*(1)X(1)\Lambda^{-1}\left(I - e^{a^2\Lambda(t-T)}\right)\right]^{-1}.$$

Функцию $K(t,x,s)$ (см. (4.14)) можно записать в следующем виде: $K(t,x,s) = X(x)A(t)X^*(s)$, где введено обозначение $X(x) = \{X_1(x),\ X_2(x),\ \ldots\}$. Поэтому

$$K(t,x,s) = X(x)\,e^{a^2\Lambda(t-T)}\times$$
$$\times\left[I + \frac{\alpha^2a^4}{\beta}\,X^*(1)X(1)\Lambda^{-1}\left(I - e^{a^2\Lambda(t-T)}\right)\right]^{-1}X^*(s).$$

Следовательно, функционал $S(t,x,s)$ (см. (4.7)) можно представить так:

$$S(t,u(t,x)) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 X(x)\,e^{a^2\Lambda(t-T)}\cdot$$
$$\cdot\left[I + \frac{\alpha^2a^4}{\beta}\,X^*(1)X(1)\Lambda^{-1}\left(I - e^{a^2\Lambda(t-T)}\right)\right]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\,X^*(s)\,u(t,x)\,u(t,s)\,dx\,ds.$$

4.3. Построение оптимального управления. Полученное представление функционала S используем для построения оптимального управления с учетом их связи по формуле (4.4), в которой $\psi(t,1)$ — значение производной Фреше функционала S в точке $x=1$. Эта производная определяется по формуле (4.8), т. е.

$$\psi(t,x) = 2\int_0^1 X(x)\, e^{a^2\Lambda(t-T)}\Big[I+ \\ + \frac{\alpha^2 a^4}{\beta}\, X^*(1)X(1)\Lambda^{-1}\left(I - e^{a^2\Lambda(t-T)}\right)\Big]^{-1} X^*(s)\, u(t,s)\, ds.$$

Поэтому оптимальное управление можно представить в виде

$$p(t) = -\frac{a^2\alpha}{\beta}\, X(1)\, e^{a^2\Lambda(t-T)}\Big[I+ \\ +\frac{\alpha^2 a^4}{\beta}\, X^*(1)X(1)\Lambda^{-1}\left(I - e^{a^2\Lambda(t-T)}\right)\Big]^{-1}\int_0^1 X^*(s)\, u(t,s)\, ds.$$

Так как $u_n(t) = \displaystyle\int_0^1 u(t,x)\, X_n(x)\, dx$, то последнюю формулу можно представить в виде

$$p(t) = -\frac{a^2\alpha}{\beta}\, X(1)\, e^{a^2\Lambda(t-T)}\Big[I+ \\ + \frac{\alpha^2 a^4}{\beta}\, X^*(1)X(1)\Lambda^{-1}\left(I - e^{a^2\Lambda(t-T)}\right)\Big]^{-1} U^*(t),$$

где $U(t) = \{u_1(t),\, u_2(t),\, \ldots\}$.

Таким образом, применяя динамическое программирование при решении задачи оптимального управления процессом теплопроводности, удается определить оптимальное управление в виде функционала состояния объекта, т. е. решить задачу синтеза оптимального управления.

Глава 6

Задачи управляемости и наблюдаемости для колебательных систем

1. Краевые задачи для колебательных систем

Рассмотрим процесс колебания упругой (т. е. не сопротивляющейся изгибу) струны. Свободные колебания струны описывает *волновое уравнение*: $u_{tt}(t,\, x) = a^2 u_{xx}(t,\, x)$. Здесь функция $u = u(x,t)$ характеризует вертикальное перемещение точки x в момент времени t.

При математическом описании любого физического процесса надо поставить задачу, позволяющую однозначно определить процесс. Поскольку обыкновенные дифференциальные уравнения, а тем более уравнения с частными, производными имеют бесконечно много решений, то для однозначной характеристики процесса к уравнению необходимо присоединить ряд дополнительных условий.

1.1. Свободные колебания струны. Приведем формулировки рассматриваемых ниже краевых задач. Сначала сформулируем задачу для струны длиной ℓ, концы которой *закреплены*. Обозначим

$$Q = \{\, (x,t)\colon\ 0 < x < \ell,\ t > 0\,\}.$$

Первая краевая задача: найти функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in Q, \tag{1.1}$$

начальным условиям:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell, \tag{1.2}$$

а также *граничным* условиям:

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \qquad t \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Для струны со *свободными* концами задача формулируется следующим образом.

Вторая краевая задача: найти функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1.1), начальным условиям (1.2) и граничным условиям:

$$u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, \qquad t \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Наконец, для струны с *упруго закрепленными* концами ставится третья краевая задача.

Третья краевая задача: найти функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1.1), начальным условиям (1.2) и граничным условиям:

$$u_x(0,t) - \beta\, u(0,t) = 0,\;\; u_x(\ell,t) + \alpha\, u(\ell,t) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{1.5}$$

Граничные условия (1.3), (1.4) и (1.5) называются граничными условиями *первого*, *второго* и *третьего* рода соответственно. Кроме этого, условия (1.3)–(1.5) называются также *однородными* граничными условиями.

Кроме этих постановок, возможны постановки так называемых *смешанных* краевых задач, а именно когда на концах струны заданы граничные условия разных родов. Например, левый конец струны закреплен, а правый конец струны свободен или левый — свободен, а правый — упруго закреплен. Таким образом, возможны шесть типов смешанных краевых задач.

Приведем пример постановки *смешанной краевой задачи*: найти функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1.1), начальным условиям (1.2) и граничным условиям:

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\ell,t) + \alpha\, u(\ell,t) = 0, \qquad t \geqslant 0.$$

Можно назвать такую задачу *смешанной краевой задачей типа* (2;3): на левом конце задано граничное условие второго рода, а на правом — третьего.

1.2. Вынужденные колебания струны. Теперь рассмотрим колебательный процесс, который описывается неоднородными граничными условиями. В этом случае будем говорить, что имеют место вынужденные колебания струны.

Если концы струны движутся по заданным законам, то первая краевая задача принимает следующий вид.

Первая краевая задача: найти функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1.1), начальным условиям (1.2) и граничным условиям:

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u(\ell,t) = \nu(t), \qquad t \geqslant 0. \tag{1.6}$$

Если же на границах струны заданы некоторые силы, то вторая краевая задача в этом случае формулируется таким образом.

Вторая краевая задача: найти функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1.1), начальным условиям (1.2) и граничным условиям:

$$u_x(0,t) = \mu(t), \quad u_x(\ell,t) = \nu(t), \qquad t \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Наконец, если на границах струны действуют упругие силы, то справедлива такая постановка третьей краевой задачи.

Третья краевая задача: найти функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1.1), начальным условиям (1.2) и граничным условиям при $t \geqslant 0$:

$$u_x(0,t) - \beta\, u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(\ell,t) + \alpha\, u(\ell,t) = \nu(t), \tag{1.8}$$

где предполагается, что $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Замечание 1.1. Одно из условий в приведенных выражениях (1.6)–(1.8) может оказаться однородным, т. е. один из концов струны может быть закреплен (первая краевая задача), свободен (вторая краевая задача) или упруго закреплен (третья краевая задача).

Приведем пример такой постановки задачи: найти функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1.1), начальным условиям (1.2) и граничным условиям:

$$u_x(0,t) = \mu(t), \quad u_x(\ell,t) = 0, \qquad t \geqslant 0.$$

Здесь на левом конце струны действует заданная сила, а правый конец свободен.

Можно также сформулировать смешанные краевые задачи, описывающие вынужденные колебания струны. Например, *смешанная краевая задача типа* (1;2): найти функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1.1), начальным условиям (1.2) и граничным условиям[1]:

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(\ell,t) = 0, \qquad t \geqslant 0. \tag{1.9}$$

2. Решение краевых задач

Определение 2.1. Дважды непрерывно дифференцируемая в замыкании множества Q функция $u = u(x,t)$ называется *решением* краевой задачи, если она удовлетворяет уравнению (1.1), начальным условиям (1.2) и соответствующим граничным условиям[2].

Приведем решение третьей краевой задачи (1.1), (1.2), (1.8), поскольку решение второй краевой задачи, в том числе и соответствующих смешанных, получается из него при равенстве нулю коэффициентов α и β.

Если функция $u = u(x,t)$ дважды дифференцируема в замыкании множества Q, то для третьей краевой задачи (1.1), (1.2), (1.8) должно выполняться следующее согласование начальных и граничных условий:

$$\begin{aligned} &\varphi'(0) - \beta\,\varphi(0) = \mu(0), \quad \varphi'(\ell) + \alpha\,\varphi(\ell) = \nu(0), \\ &\psi'(0) - \beta\,\psi(0) = \mu'(0), \quad \psi'(\ell) + \alpha\,\psi(\ell) = \nu'(0). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Замечание 2.1. Для каждой краевой задачи согласование начальных и граничных условий будет своим. Например, для смешанной краевой задачи типа $(1;2)$ с граничными условиями (1.9) это согласование примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\varphi(0) = \mu(0), \quad \psi(0) = \mu'(0), \\ &\varphi'(\ell) = \psi'(\ell) = 0, \quad a^2\varphi''(0) = \mu''(0). \end{aligned}$$

---

[1] Примером такого волнового процесса является упражнение в художественной гимнастике с лентой: лента прикреплена к палочке, второй ее конец свободен; подергивание палочки (закрепленный конец ленты движется по заданному закону) «гонит» волну вдоль ленты.

[2] Такие решения еще называются классическими.

2.1. Метод Даламбера. Ж. Л. Даламбер первым высказал идею о том, что решение волнового уравнения (1.1) представляет собой суперпозицию «прямой» и «обратной» волны, т. е. решение уравнения (1.1) имеет следующий вид:

$$u(x,t) = E(x+at) + G(x-at). \tag{2.2}$$

В этом легко убедиться, продифференцировав дважды по x и по t функцию (2.2). Здесь коэффициент a представляет собой скорость распространения волны вдоль рассматриваемой струны длиной ℓ.

2.1.1. *Решение третьей краевой задачи.* Наша цель заключается в том, чтобы, используя начальные (1.2) и граничные (1.8) условия третьей краевой задачи, описать функции E и G. Поскольку время T прохождения волны вдоль струны равно ℓ/a, то будем использовать промежутки времени t, кратные $T = \ell/a$ при описании этих функций E и G.

Для функции (2.2) при $t = 0$ начальные условия (1.2) дают следующие выражения для E и G :

$$E(x) + G(x) = \varphi(x), \quad E(x) - G(x) = \frac{\widehat{\psi}(x)}{a}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell,$$

где введено обозначение $\widehat{\psi}(x) = \int\limits_0^x \psi(t)\,dt$. Откуда для всех $0 \leqslant z \leqslant \ell$ справедливо:

$$E(z) = \frac{\varphi(z)}{2} + \frac{\widehat{\psi}(z)}{2a}, \quad G(z) = \frac{\varphi(z)}{2} - \frac{\widehat{\psi}(z)}{2a}. \tag{2.3}$$

Граничные условия (1.8), с учетом выражения (2.2), приводят к следующим равенствам:

$$E'(at) + G'(-at) - \beta\big[E(at) + G(-at)\big] = \mu(t), \tag{2.4}$$

$$E'(\ell+at)+G'(\ell-at)+\alpha\big[E(\ell+at) + G(\ell-at)\big]=\nu(t). \tag{2.5}$$

Из (2.4), (2.5) и найденных выражений (2.3) для функций E и G на отрезке $[0,\, \ell]$ при $0 \leqslant t \leqslant T = \ell/a$ получим продолжения функции G на отрезок $[-\ell,\, 0]$ и функции E на отрезок $[\ell,\, 2\ell]$.

В равенстве (2.4) сделаем замену $z = at$; если взят период времени $[0,\, T]$, то $0 \leqslant z \leqslant \ell$. Тогда находим дифференциальное уравнение: $g'(z) + \beta g(z) = f_1(z)$, где $g(z) = G(-z)$ и $f_1(z) = -\mu(z/a) + \big[E'(z) - \beta\, E(z)\big]$ — известная функция, поскольку на $[0,\, \ell]$ функция E определена в выражении (2.3).

Решая полученное линейное с постоянными коэффициентами неоднородное дифференциальное уравнение методом вариации постоянной, найдем его решение: $g(z) = C_0 e^{-\beta z} + \int\limits_0^z f_1(\zeta) e^{-\beta(z-\zeta)}\, d\zeta$. Поскольку выполняются равенства $g(0) = G(0) = \varphi(0)/2$, то приходим к следующему продолжению функции G на отрезок $[-\ell,\, 0]$:

$$G(-z) = \frac{\varphi(0)}{2}\, e^{-\beta z} + \\ + \int\limits_0^z \Big(-\mu(\zeta/a) + \big[E'(\zeta) - \beta\, E(\zeta)\big]\Big)\, e^{-\beta(z-\zeta)}\, d\zeta, \quad (2.6)$$

где $0 \leqslant z \leqslant \ell$.

Если обозначить в равенстве (2.5) $z = at$, получаем, что z пробегает отрезок $[0,\, \ell]$ при произвольном $0 \leqslant t \leqslant T$. Поэтому при введенных обозначениях $h(z) = E(\ell + z)$ и $f_2(z) = \nu(z/a) - \big[G'(\ell - z) + \alpha\, G(\ell - z)\big]$ приходим к дифференциальному уравнению: $h'(z) + \alpha\, h(z) = f_2(z)$. Решим полученное уравнение, применяя метод вариации постоянной для $0 \leqslant z \leqslant \ell$:

$$E(\ell + z) = E(\ell)\, e^{-\alpha z} + \\ + \int\limits_{\ell - z}^{\ell} \left(\nu\Big(\frac{\ell - \zeta}{a}\Big) - \big[G'(\zeta) + \alpha\, G(\zeta)\big]\right) e^{-\alpha\big(\zeta - (\ell - z)\big)}\, d\zeta. \quad (2.7)$$

Далее из равенств (2.4) и (2.5) можно получить продолжения функций E и G на отрезки $[2\ell,\, 3\ell]$ и $[-2\ell,\, -\ell]$ соответственно, подставляя $t \in [T,\, 2T]$ и используя полученные выражения (2.6) и (2.7) для функций G и E.

Таким образом, на отрезке $[-2\ell,\,-\ell]$ для функции G также справедливо выражение (2.6), где используются для функции E равенство (2.3), когда $0 \leqslant \zeta \leqslant \ell$, и равенство (2.7), когда $\ell \leqslant \zeta \leqslant 2\ell$.

Аналогично, на отрезке $[2\ell,\,3\ell]$ для функции E также справедливо выражение (2.7), где при $\zeta < 0$ используется равенство (2.6) для функции G, а при $0 \leqslant \zeta \leqslant \ell$ — равенство (2.3) для функции G.

Следовательно, приведенными последовательными операциями можно продолжать решение краевой задачи на произвольный отрезок времени, используя формулу Даламбера. Тем самым доказывается существование решения третьей краевой задачи. Единственность такого решения доказывается довольно просто, поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть функция φ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,\,\ell]$ и функция ψ непрерывно дифференцируема на этом отрезке. Тогда каждые непрерывно дифференцируемые при $t \geqslant 0$ функции μ и ν, для которых справедливы равенства* (2.1)*, однозначно определяют единственное решение $u = u(x,t)$ третьей краевой задачи, которое задается равенством* (2.2)*. При этом на отрезке $[0,\,\ell]$ функции E и G представимы выражениями* (2.3)*. Для отрицательных аргументов функция G имеет вид* (2.6) *при $z > 0$, а для аргументов, больших ℓ, функция E имеет вид* (2.7)*, в этом равенстве $z > 0$.*

Решение второй краевой задачи (1.1), (1.2) и (1.7) получаем из теоремы 2.1, полагая $\alpha = \beta = 0$.

Теорема 2.2. *Пусть функция φ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,\,\ell]$ и функция ψ непрерывно дифференцируема на этом отрезке. Тогда каждые непрерывно дифференцируемые при $t \geqslant 0$ функции μ и ν, для которых справедливы равенства* (2.1) *при $\alpha = \beta = 0$, однозначно определяют единственное решение $u = u(x,t)$ второй краевой задачи, которое задается равенством* (2.2)*. При этом на отрезке $[0,\,\ell]$ функции E и G представимы выражениями* (2.3)*. Для отрицательных аргументов функции G верно*

$$G(-z) = E(z) - \int\limits_0^z \mu\Big(\frac{\zeta}{a}\Big)\, d\zeta, \tag{2.8}$$

а для аргументов, больших ℓ, функция E имеет вид

$$E(\ell + z) = E(\ell) - G(\ell) + G(\ell - z) + \int\limits_{\ell-z}^{\ell} \nu\Big(\frac{\ell - \zeta}{a}\Big)\, d\zeta \tag{2.9}$$

(в выражениях (2.8) *и* (2.9) $z > 0$*).*

Замечание 2.2. Если в выражениях (2.6), (2.7) положить $\mu(t) \equiv 0$ и $\nu(t) \equiv 0$, то теорема 2.1 дает решение третьей краевой задачи, описывающей свободные колебания струны с упруго закрепленными концами.

Аналогично, если для выражений (2.8) и (2.9) выполняется $\mu(t) \equiv 0$ и $\nu(t) \equiv 0$, то теорема 2.2 дает решение второй краевой задачи, описывающей свободные колебания струны со свободными концами.

2.1.2. *Решение первой краевой задачи.* Решение первой краевой задачи не получается из рассмотренных выше результатов. Тем не менее его можно получить, применяя аналогичные рассуждения. Поэтому приведем только результат.

Теорема 2.3. *Пусть функция φ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,\, \ell]$ и функция ψ непрерывно дифференцируема на этом отрезке. Тогда каждые дважды непрерывно дифференцируемые при $t \geqslant 0$ функции μ и ν, для которых справедливы равенства:*

$$\begin{gathered} \varphi(0)=\mu(0),\ \ \varphi(\ell)=\nu(0),\ \ \psi(0)=\mu'(0),\ \ \psi(\ell)=\nu'(0), \\ a^2\varphi''(0) = \mu''(0), \quad a^2\varphi''(\ell) = \nu''(0), \end{gathered} \tag{2.10}$$

однозначно определяют единственное решение $u = u(x,t)$ первой краевой задачи, которое задается равенством (2.2). *При этом на отрезке $[0,\, \ell]$ функции E и G представимы выражениями* (2.3). *Для отрицательных аргументов функции G верно*

$$G(-z) = -E(z) + \mu\Big(\frac{z}{a}\Big), \tag{2.11}$$

а для аргументов, больших ℓ, функция E имеет вид

$$E(\ell + z) = -G(\ell - z) + \nu\left(\frac{z}{a}\right) \tag{2.12}$$

(*в выражениях* (2.11) *и* (2.12) $z > 0$).

Замечание 2.3. Если в выражениях (2.11) и (2.12) верно $\mu(t) \equiv 0$ и $\nu(t) \equiv 0$, то теорема 2.3 дает решение первой краевой задачи, описывающей свободные колебания струны с закрепленными концами.

2.2. Метод Фурье. Приведем формальное решение первой краевой задачи *методом Фурье*, который также называют *методом разделения переменных*.

Функцию $u = u(x, t)$ представим в следующем виде:

$$u(x, t) = X(x)\, U(t). \tag{2.13}$$

Подставим выражение (2.13) в волновое уравнение (1.1) и разделим переменные: $\dfrac{U''(t)}{a^2 U(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$. Откуда получаем дифференциальные уравнения для функций X и U: $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$, $U''(t) + \lambda^2 a^2 U(t) = 0$ соответственно.

Сначала решим краевую задачу с однородными граничными условиями. Поэтому положим $X(0) = 0$, $X(\ell) = 0$. Тогда, в связи с нахождением функции X, приходим к задаче о собственных значениях: *найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи:*

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \qquad X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0, \tag{2.14}$$

а также найти эти решения.

Поскольку общее решение задачи (2.14) имеет следующий вид: $X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$, то первое граничное условие задачи (2.14) дает $C_1 = 0$, из второго условия следует, что $C_2 \sin \lambda x = 0$. Так как $C_2 \neq 0$, то для определения λ получаем уравнения $\lambda \ell = \pi n$, $n = 1, 2, \ldots$

При значениях $\lambda_n = \pi n / \ell$, $n = 1, 2, \ldots$, существуют нетривиальные решения задачи (2.14):

$$X_n(x) = \frac{\sin \lambda_n x}{\omega_n}, \;\; \omega_n^2 = \int_0^\ell \sin^2 \lambda_n x \, dx. \tag{2.15}$$

Таким образом, решение $u = u(x,t)$ (возможно формальное) первой краевой задачи с однородными граничными условиями примет вид:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)X_n(x), \quad u_n(t)=\int_0^{\ell}u(x,t)X_n(x)\,dx. \quad (2.16)$$

Для того чтобы найти решение первой краевой задачи с неоднородными граничными условиями, функцию u_n из (2.16) дважды продифференцируем по t и воспользуемся волновым уравнением (1.1), приходим к равенству $\ddot{u}_n(t) = a^2 \int\limits_0^{\ell} u_{xx}(x,t)X_n(x)\,dx$. Интеграл в правой части полученного равенства дважды проинтегрируем по частям, воспользуемся граничными условиями (1.6), задачей (2.14) и видом (2.16) функций u_n. Получаем следующее уравнение:

$$\ddot{u}_n(t) + \lambda_n^2 a^2 u_n(t) = z_n(t), \quad (2.17)$$

где введено обозначение

$$z_n(t) = a^2\big[\,\mu(t)X_n'(0) - \nu(t)X_n'(\ell)\big]. \quad (2.18)$$

Из выражения (2.16) и начальных условий (1.2) для функции $u = u(t,\,x)$ находим:

$$u_n(0) = \varphi_n, \qquad \dot{u}_n(0) = \psi_n, \quad (2.19)$$

где φ_n и ψ_n — коэффициенты Фурье функций φ и ψ соответственно, разложенных по системе (2.15) функций X_n, $n \in \mathbb{N}$.

Решение задачи (2.17), (2.19) найдем методом вариации постоянных. Таким образом, решение u_n можно представить в виде

$$u_n(t) = \varphi_n \cos\lambda_n a t + \frac{\psi_n}{\lambda_n a}\,\sin\lambda_n a t + \\ + \frac{1}{\lambda_n a}\int_0^{t} z_n(\tau)\sin\lambda_n a(t-\tau)\,d\tau. \quad (2.20)$$

Подставляя функции (2.20) в выражение (2.16), находим формальное решение $u = u(x,t)$ первой краевой задачи с неоднородными граничными условиями:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\varphi_n \cos\lambda_n a t + \frac{\psi_n}{\lambda_n a}\,\sin\lambda_n a t\Big]\,X_n(x) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)}{\lambda_n a}\int\limits_0^t z_n(\tau)\sin\lambda_n a(t-\tau)\,d\tau, \quad (2.21)$$

$z_n(\tau)$ выражено в (2.18).

Замечание 2.4. Оставляя в стороне математическое обоснование метода, отметим только, что специфика этого метода (представление решения в виде ряда Фурье) требует повышенной гладкости функций φ и ψ по сравнению с методом Даламбера, а именно требуется, чтобы выполнялись следующие условия: $\varphi \in C^3[0,\,\ell]$ и $\psi \in C^2[0,\,\ell]$.

3. Гашение колебаний струны

Решим задачи гашения колебаний струны с помощью граничного воздействия на нее: двигая границы струны по заданным законам (первая краевая задача), изменяя ее натяжение на концах (вторая краевая задача) или воздействуя на ее границы упругой силой (третья краевая задача).

В дальнейшем будем говорить об управлении колебаниями струны в условиях соответствующей краевой задачи. Начнем со строгих формулировок задач.

Задача управляемости. *Найти момент времени T, функции μ и ν такие, что решение $u = u(x,t)$ соответствующей краевой задачи с начальными значениями* (1.2) *в момент времени T принимает нулевые значения*:

$$u(x,T) = 0, \quad u_t(x,T) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell. \quad (3.1)$$

Эту задачу будем также называть *задачей управляемости по двум границам*.

Аналогично можно сформулировать задачу гашения колебаний струны в случае, когда граничное воздействие осуществляется только на одном (например, левом) конце струны, при этом другой конец струны либо закреплен, либо свободен, либо упруго закреплен.

З а д а ч а у п р а в л я е м о с т и. *Найти момент времени* T *и функцию* μ *такие, что решение* $u = u(x, t)$ *соответствующей краевой задачи с начальными значениями* (1.2) *в момент времени* T *принимает нулевые значения* (3.1).

Эту задачу будем также называть *задачей управляемости по одной границе*.

3.1. Гашение колебаний струны по двум границам в условиях первой краевой задачи.

3.1.1. *Использование метода Даламбера.* Определим момент времени T, за который можно погасить колебания струны. Поскольку время прохождения волны от одного конца струны длины ℓ до другого равно ℓ/a, то в качестве момента времени T возьмем этот период времени.

Для $T = \ell/a$ финальные условия (3.1), с учетом выражения (2.2), принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} &E(x+\ell) + G(x-\ell) = 0, \\ &E(x+\ell) - G(x-\ell) = 2C, \end{aligned} \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell, \tag{3.2}$$

здесь C — константа, которую найдем позже.

От системы (3.2) приходим к следующим выражениям:

$$E(\ell + x) = C, \quad G\bigl(-(\ell - x)\bigr) = -C, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell. \tag{3.3}$$

Найдем константу C. При $x = 0$ из первого равенства (3.3) и из (2.3) получаем $C = E(\ell) = \dfrac{\varphi(\ell)}{2} + \dfrac{\widehat{\psi}(\ell)}{2a}$, а из второго выражения (3.3) при $x = \ell$ определяем, что постоянная C равна $-G(0) = -\dfrac{\varphi(0)}{2}$. Верно равенство:

$$2C = \varphi(\ell) + \frac{\widehat{\psi}(\ell)}{a} = -\varphi(0). \tag{3.4}$$

Таким образом, приходим к дополнительным условиям на функции φ и ψ:

$$\varphi(0) + \varphi(\ell) + \frac{\widehat{\psi}(\ell)}{a} = 0. \tag{3.5}$$

Теперь раскроем, используя равенства (2.12) и (2.11) соответственно, выражения (3.3) и найдем формулы, определяющие граничные воздействия μ и ν:

$$\nu\left(\frac{x}{a}\right) = G(\ell - x) + C, \qquad \mu\left(\frac{\ell - x}{a}\right) = E(\ell - x) - C.$$

Сделаем в первом равенстве замену $t = x/a$, во втором равенстве замену $t = (\ell - x)/a$, воспользуемся выражениями (2.3) и (3.4), найдем функции ν и μ при $0 \leqslant t \leqslant T = \ell/a$:

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \frac{\varphi(\ell - at)}{2} - \frac{\widehat{\psi}(\ell - at)}{2a} - \frac{\varphi(0)}{2}, \\ \mu(t) &= \frac{\varphi(at)}{2} + \frac{\widehat{\psi}(at)}{2a} + \frac{\varphi(0)}{2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Учитывая согласование начальных и краевых условий первой краевой задачи (2.10) найдем дополнительные условия на функции φ и ψ:

$$\varphi'(0) = \frac{\psi(0)}{a}, \qquad \varphi''(0) = \frac{\psi'(0)}{a}, \tag{3.7}$$

$$\varphi'(\ell) = -\frac{\psi(\ell)}{a}, \qquad \varphi''(\ell) = -\frac{\psi'(\ell)}{a}. \tag{3.8}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть функции* $\varphi \in C^2[0, \ell]$ *и* $\psi \in C^1[0, \ell]$ *удовлетворяют условиям* (3.5), (3.7) *и* (3.8)*. Тогда функции* μ *и* ν *вида* (3.6)*, принадлежащие* $C^2[0, T]$*, гасят колебания струны за период времени* $T = \ell/a$*.*

3.1.2. *Использование метода Фурье.* Равенства (3.1) для решения (2.21) первой краевой задачи в момент времени $T = \ell/a$ принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} \varphi_n \cos\lambda_n\ell + \frac{\psi_n}{\lambda_n a}\sin\lambda_n\ell + \frac{1}{\lambda_n a}\int\limits_0^{\ell/a} z_n(\tau)\sin\lambda_n(\ell - a\tau)\,d\tau = 0; \\ -\lambda_n a\varphi_n \sin\lambda_n\ell + \psi_n\cos\lambda_n\ell + \int\limits_0^{\ell/a} z_n(\tau)\cos\lambda_n(\ell - a\tau)\,d\tau = 0. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Здесь $n = 1, 2, \ldots$ и z_n имеет вид (2.18). Поскольку для первой краевой задачи выполняется $\lambda_n \ell = \pi n$, а X_n определены в (2.15), то $z_n(\tau) = \dfrac{a^2\lambda_n}{\omega_n}\left[\mu(\tau) - \nu(\tau)\cos\lambda_n\ell\right]$.

В подынтегральном выражении первого уравнения (3.9) сделаем замену $\ell - a\tau = z$:

$$\varphi_n \cos\lambda_n\ell + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^\ell \mu\Big(\frac{\ell - z}{a}\Big)\sin\lambda_n z\,dz -$$
$$- \frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^\ell \nu\Big(\frac{\ell - z}{a}\Big)\cos\lambda_n\ell\sin\lambda_n z\,dz = 0.$$

Поскольку $\sin\lambda_n\ell = 0$, то $-\cos\lambda_n\ell\sin\lambda_n z = \sin\lambda_n(\ell - z)$. Вводим новую переменную вместо переменной $\ell - z$ во втором интеграле полученного равенства, приходим к следующему уравнению:

$$\varphi_n \cos\lambda_n\ell + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^\ell \mu\Big(\frac{\ell - z}{a}\Big)\sin\lambda_n z\,dz +$$
$$+ \frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^\ell \nu\Big(\frac{z}{a}\Big)\sin\lambda_n z\,dz = 0. \quad (3.10)$$

Аналогично преобразуем и второе уравнение в (3.9):

$$\psi_n \cos\lambda_n\ell + \frac{a\lambda_n}{\omega_n}\int\limits_0^\ell \mu\Big(\frac{\ell - z}{a}\Big)\cos\lambda_n z\,dz -$$
$$- \frac{a\lambda_n}{\omega_n}\int\limits_0^\ell \nu\Big(\frac{z}{a}\Big)\cos\lambda_n z\,dz = 0. \quad (3.11)$$

Интегралы в равенстве (3.11) возьмем по частям:

$$\int\limits_0^\ell \mu\Big(\frac{\ell - z}{a}\Big)\cos\lambda_n z\,dz = -\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^\ell \frac{d}{dz}\Big[\mu\Big(\frac{\ell - z}{a}\Big)\Big]\sin\lambda_n z\,dz;$$

$$\int_0^\ell \nu\Big(\frac{z}{a}\Big) \cos \lambda_n z\, dz = -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^\ell \frac{d}{dz}\Big[\nu\Big(\frac{z}{a}\Big)\Big]\, \sin \lambda_n z\, dz.$$

Равенство (3.11) запишем с учетом полученных выражений

$$\psi_n \cos \lambda_n \ell - \frac{a}{\omega_n} \int_0^\ell \frac{d}{dz}\Big[\mu\Big(\frac{\ell - z}{a}\Big)\Big]\, \sin \lambda_n z\, dz + {} \\ + \frac{a}{\omega_n} \int_0^\ell \frac{d}{dz}\Big[\nu\Big(\frac{z}{a}\Big)\Big]\, \sin \lambda_n z\, dz = 0. \qquad (3.12)$$

Наконец, найдем функции, коэффициенты Фурье которых имеют вид $\varphi_n \cos \lambda_n \ell$ и $\psi_n \cos \lambda_n \ell$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos \lambda_n \ell\, \frac{\sin \lambda_n x}{\omega_n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\, \frac{\sin \lambda_n (\ell - x)}{\omega_n} = -\varphi(\ell - x);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos \lambda_n \ell\, \frac{\sin \lambda_n x}{\omega_n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n\, \frac{\sin \lambda_n (\ell - x)}{\omega_n} = -\psi(\ell - x).$$

Равенства (3.10) и (3.12) умножим на X_n и просуммируем по n, получим следующие выражения:

$$-\varphi(\ell - x) + \mu\Big(\frac{\ell - x}{a}\Big) + \nu\Big(\frac{x}{a}\Big) = 0; \qquad (3.13)$$

$$-\psi(\ell - x) - a\, \frac{d}{dx}\Big[\mu\Big(\frac{\ell - x}{a}\Big)\Big] + a\, \frac{d}{dx}\Big[\nu\Big(\frac{x}{a}\Big)\Big] = 0. \qquad (3.14)$$

Проинтегрируем (3.14) от x до ℓ:

$$-\frac{\widehat{\psi}(\ell - x)}{a} + \mu\Big(\frac{\ell - x}{a}\Big) - \nu\Big(\frac{x}{a}\Big) = C_0, \qquad (3.15)$$

где $C_0 = \mu(0) - \nu(\ell/a)$.

Окончательно из (3.13) и (3.15) находим при $0 \leqslant t \leqslant \ell/a$:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{\varphi(at)}{2} + \frac{\widehat{\psi}(at)}{2a} + \frac{C_0}{2}; \\ \nu(t) &= \frac{\varphi(\ell - at)}{2} - \frac{\widehat{\psi}(\ell - at)}{2a} - \frac{C_0}{2}. \end{aligned} \qquad (3.16)$$

Если сравнить выражения (3.16) с полученными ранее выражениями (3.6) для функций μ и ν методом Даламбера, то находим, что константа C_0 должна равняться $\varphi(0)$, а это возможно, если обратиться к равенствам (2.10) при условии, что $\nu(\ell/a) = \nu(T) = 0$. Это вполне естественное условие: в финальный момент времени T воздействие ν на правом конце заканчивается.

Вывод. Аналитические выражения для граничных воздействий μ и ν на концах струны, полученные методом Даламбера и методом Фурье, совпадают.

3.2. Управляемость в условиях первой краевой задачи по одной границе. Представим решение задачи методом Даламбера.

Определим момент времени T, в течение которого возможно погасить колебания. Волна от левого до закрепленного правого конца струны проходит в течение периода времени ℓ/a. Затем, отразившись от правого конца, в течение периода времени ℓ/a она достигает левого конца струны, на котором и осуществляется управляющее воздействие. Поэтому период времени T, за который можно погасить колебания струны, равен $2\ell/a$.

Итак, финальные условия (3.1) принимают вид:

$$\begin{aligned} &E(2\ell + x) + G(x - 2\ell) = 0;\\ &E(2\ell + x) - G(x - 2\ell) = 2C_1; \end{aligned} \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell,$$

постоянная C_1 будет определена ниже. Следовательно,

$$E(2\ell + x) = C_1, \quad G\bigl(-(2\ell - x)\bigr) = -C_1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell. \tag{3.17}$$

При $\nu(t) \equiv 0$ воспользуемся выражениями (2.11) и (2.12) и преобразуем равенства (3.17) в следующие:

$$C_1 = E\bigl(\ell + (\ell + x)\bigr) = -G\bigl(\ell - (\ell + x)\bigr) = -G(-x) = E(x) - \mu\Bigl(\frac{x}{a}\Bigr);$$

и

$$\begin{aligned} -C_1 &= G\bigl(-(2\ell - x)\bigr) = -E(2\ell - x) + \mu\Bigl(\frac{2\ell - x}{a}\Bigr) = \\ &= -E\Bigl(\ell + (\ell - x)\Bigr) + \mu\Bigl(\frac{2\ell - x}{a}\Bigr) = G(x) + \mu\Bigl(\frac{2\ell - x}{a}\Bigr). \end{aligned}$$

Из этих равенств путем соответствующих замен находим

$$\mu(t) = \begin{cases} E(at) - C_1, & 0 \leqslant t \leqslant \ell/a; \\ -G(2\ell - at) - C_1, & \ell/a \leqslant t \leqslant 2\ell/a. \end{cases} \tag{3.18}$$

Сначала определим, чему равна постоянная C_1. Так как из (2.10) следует, что $\mu(0) = \varphi(0)$, а из выражения (2.3) вытекает, что верно $E(0) = \varphi(0)/2$, то $C_1 = -\varphi(0)/2$. Итак, используя равенства (2.3), выражения (3.18) перепишем в следующем виде:

$$\mu(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(at)}{2} + \dfrac{\widehat{\psi}(at)}{2a} + \dfrac{\varphi(0)}{2}\ , & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\ell}{a}; \\ -\dfrac{\varphi(2\ell - at)}{2} + \dfrac{\widehat{\psi}(2\ell - at)}{2a} + \dfrac{\varphi(0)}{2}, & \dfrac{\ell}{a} \leqslant t \leqslant \dfrac{2\ell}{a}. \end{cases} \tag{3.19}$$

Полученная функция μ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,\, 2\ell/a]$. Для доказательства надо проверить равенства в точке $t_0 = \ell/a$: $\mu(t_0 - 0) = \mu(t_0 + 0)$, $\mu'(t_0 - 0) = \mu'(t_0 + 0)$ и соответственно равенство для второй производной $\mu''(t_0 - 0) = \mu''(t_0 + 0)$. Указанные равенства выполняются, если верно $\varphi(\ell) = \psi(\ell) = \varphi''(\ell) = 0$. Это справедливо $\big($см. выражение (2.10)$\big)$, поскольку $\nu(t) \equiv 0$.

Из согласования начальных и граничных условий (2.10) первой краевой задачи функции φ и ψ должны удовлетворять дополнительному условию (3.7).

Итак, верна теорема.

Теорема 3.2. *Пусть функции* $\varphi \in C^2[0,\, \ell]$ *и* $\psi \in C^1[0,\, \ell]$ *удовлетворяют условиям* (3.7). *Тогда функция* $\mu \in C^2[0,\, T]$ *вида* (3.19) *гасит колебания струны за период времени* $T = 2\ell/a$.

3.3. Гашение колебаний в условиях третьей краевой задачи. Решим только задачу управляемости по двум границам. Как уже рассмотрено в п. 3.1.1 настоящей главы, будем гасить колебания струны в течение периода времени $T = \ell/a$.

Из финальных условий (3.3) и выражений (2.6), (2.7) получаем следующие равенства:

$$C - E(\ell)e^{-\alpha x} + \int\limits_{\ell-x}^{\ell} \big[G'(\zeta) + \alpha\, G(\zeta)\big]\, e^{-\alpha\left(\zeta-(\ell-x)\right)}\, d\zeta =$$

$$= \int\limits_{\ell-x}^{\ell} \nu\Big(\frac{\ell-\zeta}{a}\Big)\, e^{-\alpha\left(\zeta-(\ell-x)\right)}\, d\zeta, \qquad (3.20)$$

$$C + \frac{\varphi(0)}{2} e^{\beta(\ell-x)} + \int\limits_{0}^{\ell-x} \big[E'(\zeta) - \beta\, E(\zeta)\big]\, e^{-\beta\left((\ell-x)-\zeta\right)}\, d\zeta =$$

$$= \int\limits_{0}^{\ell-x} \mu\Big(\frac{\zeta}{a}\Big)\, e^{-\beta\left((\ell-x)-\zeta\right)}\, d\zeta. \qquad (3.21)$$

Из этих выражений видно, что константа C, как и в случае первой краевой задачи, при $x = 0$ в (3.20) и $x = \ell$ в (3.21) имеет вид: $C = -\dfrac{\varphi(0)}{2} = \dfrac{\varphi(\ell)}{2} + \dfrac{\widehat{\psi}(\ell)}{2a}$. Поэтому для функций начального состояния выполнено условие (3.5).

Дифференцируя по x равенства (3.20), (3.21), получаем

$$\alpha E(\ell)e^{-\alpha x} + \big[G'(\ell-x) + \alpha G(\ell-x)\big] -$$

$$- \alpha \int\limits_{\ell-x}^{\ell} \big[G'(\zeta) + \alpha\, G(\zeta)\big]\, e^{-\alpha\left(\zeta-(\ell-x)\right)}\, d\zeta =$$

$$= \nu\Big(\frac{x}{a}\Big) - \alpha \int\limits_{\ell-x}^{\ell} \nu\Big(\frac{\ell-\zeta}{a}\Big)\, e^{-\alpha\left(\zeta-(\ell-x)\right)}\, d\zeta, \qquad (3.22)$$

$$- \beta\frac{\varphi(0)}{2} e^{\beta(\ell-x)} - \big[E'(\ell-x) - \beta E(\ell-x)\big] +$$

$$+ \beta \int\limits_{0}^{\ell-x} \big[E'(\zeta) - \beta\, E(\zeta)\big]\, e^{-\beta\left((\ell-x)-\zeta\right)}\, d\zeta =$$

$$= -\mu\Big(\frac{\ell - x}{a}\Big) + \beta \int\limits_0^{\ell-x} \mu\Big(\frac{\zeta}{a}\Big)\, e^{-\beta\big((\ell-x)-\zeta\big)}\, d\zeta. \qquad (3.23)$$

Наконец, выражение (3.20) умножим на α и сложим с равенством (3.22), аналогично, (3.21) умножим на $(-\beta)$ и сложим с (3.23). Приходим к следующим формулам для управляющих воздействий μ и ν:

$$\nu\Big(\frac{x}{a}\Big) = \alpha C + \big[G'(\ell - x) + \alpha G(\ell - x)\big]; \qquad (3.24)$$

$$\mu\Big(\frac{\ell - x}{a}\Big) = \beta C + \big[E'(\ell - x) - \beta E(\ell - x)\big], \qquad (3.25)$$

здесь $C = -\dfrac{\varphi(0)}{2} = \dfrac{\varphi(\ell)}{2} + \dfrac{\widehat{\psi}(\ell)}{2a}$.

Используя согласование (2.1) начальных и граничных условий третьей краевой задачи и вид (2.3) функций E и G, получаем равенства:

$$\alpha C = \frac{\varphi'(\ell) + \alpha\varphi(\ell)}{2} + \frac{\psi(\ell) + \alpha\widehat{\psi}(\ell)}{2a}; \qquad (3.26)$$

$$\beta C = \frac{\varphi'(0) - \beta\varphi(0)}{2} - \frac{\psi(0)}{2a}. \qquad (3.27)$$

Из (3.26) и (3.27) найдем дополнительное условие на функции начального состояния φ и ψ, учтем условие (3.5):

$$\varphi'(\ell) + \frac{\psi(\ell)}{a} = 0, \qquad \varphi'(0) - \frac{\psi(0)}{a} = 0. \qquad (3.28)$$

Теперь сделаем в выражениях (3.24) и (3.25) соответственные замены $t = x/a$ и $t = (\ell - x)/a$, приходим к виду управляющих воздействий μ и ν при $0 \leqslant t \leqslant T = \ell/a$:

$$\nu(t) = \alpha\left[\frac{\varphi(\ell)}{2} + \frac{\widehat{\psi}(\ell)}{2a}\right] + \frac{\varphi'(\ell - at) + \alpha\varphi(\ell - at)}{2} - {}$$
$$- \frac{\psi(\ell - at) + \alpha\widehat{\psi}(\ell - at)}{2a}; \qquad (3.29)$$

$$\mu(t) = -\beta\,\frac{\varphi(0)}{2} + \frac{\varphi'(at) - \beta\varphi(at)}{2} + \frac{\psi(at) - \beta\widehat{\psi}(at)}{2a}. \qquad (3.30)$$

Осталось получить еще дополнительные условия на функции начального состояния φ и ψ, которые следуют из согласования начальных и граничных условий (2.1) третьей краевой задачи. Эти условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi''(\ell) + \alpha\varphi'(\ell) &= \frac{\psi'(\ell) + \alpha\psi(\ell)}{a}; \\ \varphi''(0) - \beta\varphi'(0) &= \frac{\psi'(0) - \beta\psi(0)}{a}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Если в (3.31) учесть условия (3.28), то верно

$$\varphi''(\ell) = -\frac{\psi'(\ell)}{a}; \qquad \varphi''(0) = \frac{\psi'(0)}{a}.$$

Таким образом, для функций начального состояния выполняются условия (3.5), (3.7) и (3.8).

Справедлива теорема.

Теорема 3.3. *Пусть функции* $\varphi\in C^2[0,\,\ell]$ *и* $\psi\in C^1[0,\,\ell]$ *удовлетворяют условиям* (3.5), (3.7) *и* (3.8). *Тогда функции* ν *и* μ, *принадлежащие пространству* $C^1[0,\,T]$, *вида* (3.29) *и* (3.30) *соответственно, за период времени* $T = \ell/a$ *гасят колебания струны.*

4. Наблюдаемость упругих колебаний

В этом параграфе будем решать задачу, обратную задаче управляемости: как по результатам наблюдения на концах струны (например, за изменением их положения или за изменением натяжения на концах струны) восстановить функции начального состояния, которые и инициировали наблюдаемые колебания.

Сначала сформулируем задачу наблюдения в условиях первой краевой задачи — при закрепленных концах струны.

З а д а ч а н а б л ю д е н и я. Найти период времени T и начальное состояние (1.2) объекта, колебания которого описываются уравнением (1.1) и однородными краевыми условиями (1.3), по результатам наблюдения:

$$u_x(0,t) = w_1(t), \quad u_x(\ell,t) = w_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4.1}$$

Это задача наблюдения по обеим границам.

Задача наблюдения. Найти период времени T и начальное состояние (1.2) объекта, колебания которого описываются уравнением (1.1) и однородными краевыми условиями (1.3), по результатам наблюдения

$$u_x(0,t) = w(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4.2}$$

Это задача наблюдения по одной границе.

Аналогично можно сформулировать задачи наблюдения при граничных условиях второго рода.

Задача наблюдения. Найти период времени T и начальное состояние (1.2) объекта, колебания которого описываются уравнением (1.1) и однородными краевыми условиями (1.4), по результатам наблюдения

$$u(0,t) = w_1(t), \quad u(\ell,t) = w_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4.3}$$

Сформулирована задача наблюдения по обеим границам, а при наблюдении по одной границе задача формулируется следующим образом.

Задача наблюдения. Найти период времени T и начальное состояние (1.2) объекта, колебания которого описываются уравнением (1.1) и однородными краевыми условиями (1.4), по результатам наблюдения

$$u(0,t) = w(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Замечание 4.1. При закрепленных концах струны мы будем наблюдать за изменением натяжения в течение периода наблюдения на этих концах. При свободных концах струны — за изменением положения этих концов.

В случае же упруго закрепленных концов струны, можно, например, наблюдать за изменением натяжения в течение периода наблюдения на концах струны — (4.1) или же за изменением натяжения на одном конце струны — (4.2).

4.1. Наблюдаемость по двум границам в условиях первой краевой задачи. Как отмечалось в п. 3.1.1 предыдущего параграфа, период наблюдения T равен ℓ/a.

Воспользуемся решением (2.2) первой краевой задачи. Тогда условия (4.1) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} &E'(at) + G'(-at) = w_1(t), \\ &E'(\ell + at) + G'(\ell - at) = w_2(t), \end{aligned} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \ell/a. \tag{4.4}$$

Из выражений (2.11) при $\mu \equiv 0$ и (2.12) при $\nu \equiv 0$ (однородные граничные условия первого рода) находим

$$G'(-z) = E'(z), \quad E'(\ell + z) = G'(\ell - z), \qquad z > 0. \tag{4.5}$$

Условия (4.4) при выполнении равенств (4.5) принимают вид:

$$2E'(at) = w_1(t), \ 2G'(\ell - at) = w_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \ell/a. \tag{4.6}$$

С учетом (2.3) равенства (4.6) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} &\varphi'(at) + \frac{\psi(at)}{a} = w_1(t), \\ &\varphi'(\ell - at) - \frac{\psi(\ell - at)}{a} = w_2(t), \end{aligned} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \ell/a. \tag{4.7}$$

Сделав соответствующие замены в равенствах (4.7), окончательно находим выражения для φ' и ψ при $0 \leqslant x \leqslant \ell$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}\left[w_1\Big(\frac{x}{a}\Big) + w_2\Big(\frac{\ell - x}{a}\Big)\right]; \tag{4.8}$$

$$\frac{\psi(x)}{a} = \frac{1}{2}\left[w_1\Big(\frac{x}{a}\Big) - w_2\Big(\frac{\ell - x}{a}\Big)\right]. \tag{4.9}$$

Если воспользуемся обозначением $\widehat{w}_i(t) = \int\limits_0^t w_i(\tau)\,d\tau$ для $i = 1, 2$, то из (4.8) найдем выражение непосредственно для функции φ при $0 \leqslant x \leqslant \ell$:

$$\varphi(x) = \frac{a}{2}\left[\widehat{w}_1\Big(\frac{x}{a}\Big) - \widehat{w}_2\Big(\frac{\ell - x}{a}\Big) + \widehat{w}_2\Big(\frac{\ell}{a}\Big)\right]. \tag{4.10}$$

Обратим внимание на тот факт, что согласование начальных и граничных условий (2.10) при $\mu \equiv 0$ и $\nu \equiv 0$ означает, что функции наблюдения w_i, $i = 1, 2$, обладают следующими условиями:

$$\begin{gathered} w_1(0) = w_2(\ell/a), \quad w_1(\ell/a) = w_2(0), \\ w_1'(0) = w_2'(\ell/a), \quad w_1'(\ell/a) = w_2'(0), \\ \widehat{w}_1(\ell/a) = -\widehat{w}_2(\ell/a). \end{gathered} \tag{4.11}$$

Итак, справедлив следующий результат.

Теорема 4.1. *Задача наблюдаемости по двум границам для граничных условий* (1.3) *решается с минимальным периодом наблюдения $T = \ell/a$. При этом функции начального состояния φ и ψ из* (1.2) *восстанавливаются с помощью функций наблюдения* (4.1) w_1 *и* w_2 *из пространства $C^1[0,T]$, удовлетворяющих условиям* (4.11), *с помощью формул* (4.10) *и* (4.9) *соответственно.*

4.2. Наблюдаемость по одной границе в условиях первой краевой задачи. Для этой задачи период наблюдения T равен $2\ell/a$ (см. п. 3.2 предыдущего параграфа).

Выражение (2.2) для решения $u = u(x,t)$ первой краевой задачи, функция наблюдения (4.2) и первое равенство из (4.5) дают следующее:

$$2E'(at) = w(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\ell/a. \tag{4.12}$$

Очевидно, что при $0 \leqslant t \leqslant \ell/a$ выполняется

$$\varphi'(at) + \frac{\psi(at)}{a} = w(t). \tag{4.13}$$

Здесь достаточно воспользоваться выражением (2.3).

Для $\ell/a \leqslant t \leqslant 2\ell/a$ в равенстве (4.12) сделаем следующую замену: $t = \ell/a + \tau$, где $0 \leqslant \tau \leqslant \ell/a$. Тогда от выражения (4.12) приходим к $2E'(\ell + a\tau) = w\Big(\dfrac{\ell}{a} + \tau\Big)$. Следовательно, если воспользуемся вторым равенством (4.5), то находим $2G'(\ell - a\tau) = w\Big(\dfrac{\ell}{a} + \tau\Big)$. Используя выражения (2.3), получаем равенство

$$\varphi'(\ell - a\tau) - \frac{\psi(\ell - a\tau)}{a} = w\Big(\frac{\ell}{a} + \tau\Big). \tag{4.14}$$

В (4.13) сделаем замену $at = x$, а в (4.14) — замену $\ell - a\tau = x$, приходим к системе уравнений относительно функций φ' и ψ:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) + \frac{\psi(x)}{a} &= w\Big(\frac{x}{a}\Big); \\ \varphi'(x) - \frac{\psi(x)}{a} &= w\Big(\frac{2\ell}{a} - \frac{x}{a}\Big); \end{aligned} \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell.$$

Полученная система позволяет найти выражения для функций начального состояния:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}\left[w\Big(\frac{x}{a}\Big) + w\Big(\frac{2\ell}{a} - \frac{x}{a}\Big)\right]; \tag{4.15}$$

$$\frac{\psi(x)}{a} = \frac{1}{2}\left[w\Big(\frac{x}{a}\Big) - w\Big(\frac{2\ell}{a} - \frac{x}{a}\Big)\right]. \tag{4.16}$$

Найдем выражение для функции φ, используя введенные обозначения $\widehat{w}$ и выражение (4.15):

$$\varphi(x) = \frac{a}{2}\left[\widehat{w}\Big(\frac{x}{a}\Big) - \widehat{w}\Big(\frac{2\ell}{a} - \frac{x}{a}\Big) + \widehat{w}\Big(\frac{2\ell}{a}\Big)\right].$$

Заметим, что из (2.10) следует, что $\varphi(\ell) = 0$, а поэтому выполнено $\widehat{w}(2\ell/a) = 0$. Следовательно, для функции φ справедливо следующее выражение:

$$\varphi(x) = \frac{a}{2}\left[\widehat{w}\Big(\frac{x}{a}\Big) - \widehat{w}\Big(\frac{2\ell}{a} - \frac{x}{a}\Big) + \widehat{w}\Big(\frac{2\ell}{a}\Big)\right].$$

Кроме этого, согласование начальных и граничных условий (2.10) дает следующие равенства для функции наблюдения w:

$$w(0) = w(2\ell/a), \quad w'(0) = w'(2\ell/a), \quad \widehat{w}(2\ell/a) = 0. \tag{4.17}$$

С учетом свойств (4.17) функция φ имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{a}{2}\left[\widehat{w}\Big(\frac{x}{a}\Big) - \widehat{w}\Big(\frac{2\ell}{a} - \frac{x}{a}\Big)\right]. \tag{4.18}$$

Справедлива теорема.

Теорема 4.2. *Задача наблюдаемости по одной границе для граничных условий* (1.3) *решается с минимальным периодом наблюдения $T = 2\ell/a$. При этом функции начального состояния φ и ψ из* (1.2) *восстанавливаются с* *помощью функции наблюдения* (4.2) w *из* $C^1[0,T]$, *удовлетворяющей условиям* (4.17), *с помощью формул* (4.18) *и* (4.16) *соответственно.*

4.3. Наблюдаемость колебаний в условиях третьей краевой задачи. Решим только задачу наблюдаемости по обеим границам. В этом случае, как отмечалось ранее, период наблюдения T равен ℓ/a.

Вид (2.2) решения $u = u(x,t)$ третьей краевой задачи и результаты наблюдения (4.3) приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &E(at) + G(-at) = w_1(t); \\ &E(\ell + at) + G(\ell - at) = w_2(t); \end{aligned} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \ell/a. \tag{4.19}$$

Далее воспользуемся выражениями (2.6) при $\mu \equiv 0$ и (2.7) при $\nu \equiv 0$. Из первого уравнения в (4.19) получаем

$$E(at) + \frac{\varphi(0)}{2} e^{-\beta at} + \\ + \int_0^{at} \bigl[E'(\zeta) - \beta E(\zeta)\bigr] e^{-\beta(at-\zeta)}\, d\zeta = w_1(t). \tag{4.20}$$

Продифференцируем по t полученное равенство (4.20):

$$aE'(at) - a\beta \frac{\varphi(0)}{2} e^{-\beta at} + a\bigl[E'(at) - \beta E(at)\bigr] - \\ - a\beta \int_0^{at} \bigl[E'(\zeta) - \beta E(\zeta)\bigr] e^{-\beta(at-\zeta)}\, d\zeta = w_1'(t). \tag{4.21}$$

Равенство (4.20) умножим на $(a\beta)$ и сложим с (4.21); из этого следует $2E'(at) = w_1'(t) + a\beta w_1(t)$. Применяя в полученном равенстве выражения для функции E из (2.3) и сделав замену $x = at$, приходим к следующему

$$\varphi'(x) + \frac{\psi(x)}{a} = \frac{1}{a}\, w_1'\Bigl(\frac{x}{a}\Bigr) + \beta\, w_1\Bigl(\frac{x}{a}\Bigr). \tag{4.22}$$

Второе равенство из (4.19) дает

$$
\begin{gathered}
G(\ell - at) + E(\ell)e^{-\alpha at} - \\
- \int\limits_{\ell-at}^{\ell} \bigl[G'(\zeta) + \alpha G(\zeta)\bigr] e^{-\alpha\bigl(\zeta-(\ell-at)\bigr)}\, d\zeta = w_2(t). \qquad (4.23)
\end{gathered}
$$

Выражение (4.23) дифференцируем по t и находим

$$
\begin{gathered}
- aG'(\ell - at) - \alpha a E(\ell)e^{-\alpha at} - a\bigl[G'(\ell - at) + \alpha G(\ell - at)\bigr] + \\
+ \alpha a \int\limits_{\ell-at}^{\ell} \bigl[G'(\zeta) + \alpha G(\zeta)\bigr] e^{-\alpha\bigl(\zeta-(\ell-at)\bigr)}\, d\zeta = w_2'(t). \qquad (4.24)
\end{gathered}
$$

Далее (4.23) умножим на αa и сложим с (4.24), получаем следующее выражение $-2aG'(\ell - at) = w_2'(t) + \alpha a\, w_2(t)$. Теперь воспользуемся видом (2.3) функции G и сделаем замену $x = \ell - at$:

$$
-\varphi'(x) + \frac{\psi(x)}{a} = \frac{1}{a}\, w_2'\Bigl(\frac{\ell - x}{a}\Bigr) + \alpha w_2\Bigl(\frac{\ell - x}{a}\Bigr). \qquad (4.25)
$$

Из (4.22) и (4.25) найдем функции начального состояния φ' и ψ:

$$
\begin{gathered}
\varphi'(x) = \frac{1}{2a}\left[w_1'\Bigl(\frac{x}{a}\Bigr) - w_2'\Bigl(\frac{\ell - x}{a}\Bigr)\right] + \\
+ \frac{1}{2}\left[\beta\, w_1\Bigl(\frac{x}{a}\Bigr) - \alpha\, w_2\Bigl(\frac{\ell - x}{a}\Bigr)\right]; \qquad (4.26)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\psi(x)}{a} = \frac{1}{2a}\left[w_1'\Bigl(\frac{x}{a}\Bigr) + w_2'\Bigl(\frac{\ell - x}{a}\Bigr)\right] + \\
+ \frac{1}{2}\left[\beta\, w_1\Bigl(\frac{x}{a}\Bigr) + \alpha\, w_2\Bigl(\frac{\ell - x}{a}\Bigr)\right]. \qquad (4.27)
\end{gathered}
$$

Проинтегрировав равенство (4.26) от 0 до x, найдем выражение для функции φ:

$$
\begin{gathered}
\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{1}{2}\left[w_1\Bigl(\frac{x}{a}\Bigr) + w_2\Bigl(\frac{\ell - x}{a}\Bigr)\right] + \\
+ \frac{a}{2}\left[\beta\widehat{w}_1\Bigl(\frac{x}{a}\Bigr) + \alpha\widehat{w}_2\Bigl(\frac{\ell - x}{a}\Bigr) - \alpha\widehat{w}_2\Bigl(\frac{\ell}{a}\Bigr)\right]. \qquad (4.28)
\end{gathered}
$$

Из равенства (4.28) при $x = 0$ найдем первое условие на функции наблюдения:

$$w_1(0) = -w_2(\ell/a). \tag{4.29}$$

Поскольку из (2.1) следует, что $\varphi'(0) = \beta\varphi(0)$, то через функции наблюдения найдем значение $\varphi(0)$ из (4.26) и (4.29)

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\beta a}\Big[w_1'(0) - w_2'(\ell/a) + a(\beta+\alpha)w_1(0)\Big]. \tag{4.30}$$

Остальные равенства из (2.1) дают условия на функции наблюдения:

$$w_1''(0) = w_2''(\ell/a) + a(\alpha+\beta)w_2'(\ell/a) + a^2\beta(\beta-\alpha)w_2(\ell/a); \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned} w_2''(0) - a\alpha^2 w_2(0) = w_1''(\ell/a) &+ \\ + a(\alpha+\beta)w_1'(\ell/a) &+ a\alpha\beta w_1(\ell/a); \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned} \big[\beta w_1'(\ell/a) + \alpha w_1'(0)\big] - \big[\beta w_2'(0) + \alpha w_2'(\ell/a\big] &+ \\ + a(\alpha+\beta)\big[\beta w_1(\ell/a) + \alpha w_2(\ell/a)\big] &+ \\ + a^2\alpha\beta\big[\beta\widehat{w}_1(\ell/a) - \alpha\widehat{w}_2(\ell/a)\big] &= 0. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. *Задача наблюдаемости по двум границам с граничными условиями* (1.5) *решается для минимального периода наблюдения $T = \ell/a$. При этом функции начального состояния φ и ψ из* (1.2) *восстанавливаются с помощью функций наблюдения* (4.3) *w_1, w_2 из $C^2[0,T]$, удовлетворяющих условиям* (4.29), (4.31)–(4.33)*, с помощью формул* (4.28) *и* (4.27) *соответственно, при этом постоянная $\varphi(0)$ определена в* (4.30).

5. Задачи управления колебаниями упругого стержня

5.1. О свободных колебаниях стержня. При исследовании колебаний упругого стержня постоянного поперечного сечения предполагается, что он имеет ось симметрии. Если на него не действуют распределенные внешние нагрузки, то его малые свободные колебания описываются уравнением[3]

$$EJ\,\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + \rho\, F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < \xi < l, \quad 0 < t < T, \tag{5.1}$$

где $u(t,\xi)$ — смещение точки ξ в момент времени t, EJ — жесткость стержня, F — площадь поперечного сечения, $\rho = (1+e)\rho_0$, ρ_0 — объемная плотность стержня, $e = q/\rho_0 F$, q — интенсивность внешней равномерно распределенной массовой нагрузки.

Вводя замену $x = \dfrac{\xi}{l}$ и обозначение $a^2 = \dfrac{\rho F l^4}{EJ}(1+e)$, вместо уравнения (5.1) получаем уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T. \tag{5.2}$$

Для определения собственных форм упругих колебаний стержня решение уравнения (5.2) ищем в виде

$$u(t,\, x) = (C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t)X(x), \tag{5.3}$$

где ω — параметр, характеризующий гармонические колебания стержня. В итоге для определения $X(x)$ получаем уравнение

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - r^4 X = 0, \qquad 0 < x < 1, \tag{5.4}$$

где $r^4 = a^2\omega^2 = \omega^2\,\dfrac{\rho F l^4}{EJ}\,(1+e)$.

Общее решение уравнения (5.4) обычно представляется в виде $X(x) = \sum\limits_{i=1}^{4} A_i K_i(x)$, где $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ — произвольные постоянные, r — положительный действительный корень уравнения $\lambda^4 - r^4 = 0$, а функции Крылова K_i определяются формулами:

$$K_1(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\, rx + \cos rx), \qquad K_2(x) = \frac{1}{2r}(\mathrm{sh}\, rx + \sin rx),$$

$$K_3(x) = \frac{1}{2r^2}\,\mathrm{ch}\, rx - \cos rx), \quad K_4(x) = \frac{1}{2r^3}(\mathrm{sh}\, rx - \sin rx).$$

[3] См., например: *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. — М.: Машиностроение, 1970.

Эти функции удовлетворяют условиям для $i, j = 1, 2, 3, 4$:

$$\frac{dK_{i+1}(x)}{dx} = K_i(x), \quad i = 1, 2, 3, \quad K_i^{(j-1)}(0) = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Отсюда можно получить собственные формы колебаний стержня, соответствующие различным граничным условиям. Если концы стержня оперты, то

$$u(t, 0) = u_{xx}(t, 0) = u(t, 1) = u_{xx}(t, 1) = 0. \tag{5.5}$$

Тогда из (5.5) следует, что

$$X(0) = X''(0) = X(1) = X''(1) = 0 \tag{5.6}$$

и краевая задача (5.4)–(5.6) имеет собственные значения $r = \pi k$, $k = 1, 2, \ldots$

Значит, в соответствии с формулой (5.3) частоты собственных колебаний определяются из соотношений:

$$\omega_k = \frac{\pi^2 k^2}{a} = \pi^2 k^2 \sqrt{\frac{EJ}{l^4 F \rho (1+e)}}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

а соответствующие им собственные формы имеют следующий вид: $X_k(x) = D_k \sin \pi k x$, $k = 1, 2, \ldots$

При других граничных условиях собственные формы колебаний описываются тригонометрическими и гиперболическими функциями.

В частности, если левый конец стержня закреплен упруго, а правый свободен, то граничные условия для собственных форм имеют вид: $X(0) = X''(0) = X''(1) = X'''(1) = 0$. Собственные значения при этом определяются уравнением $\sin r \operatorname{ch} r = \cos r \operatorname{sh} r$, а собственные формы имеют вид $X_k(x) = D_k(\operatorname{sh} r_k \sin r_k x + \sin r_k \operatorname{sh} r_k x)$. Это вносит принципиальные трудности в решение задач управления колебаниями.

5.2. Постановка задач. Формулировка результатов. Различные задачи управления колебаниями стержня имеют многочисленные приложения[4] и являются предметом теоретических и прикладных исследований[5].

Здесь мы ограничимся формулировками различных задач полного гашения колебаний стержня за конечное время с помощью граничных управлений. Решение некоторых из этих задач удается получить применением метода Фурье.

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый краевой задачей:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 < x < 1, \\ u(0,\, x) = \varphi(x), \qquad u_t(0,\, x) = \psi(x), \\ u(t,\, 0) = \mu_0(t), \qquad u_{xx}(t,\, 0) = \mu_2(t), \\ u(t,\, 1) = \nu_0(t), \qquad u_{xx}(t,\, 1) = \nu_2(t), \end{gathered} \tag{5.7}$$

в которой управляющие функции μ_k и ν_k, $k = 0,\ 2$, пока не ограничиваем никакими требованиями, кроме одного. Каждый набор управляющих функций μ_k и ν_k, $k = 0,\ 2$, определяет классическое или обобщенное решение задачи (5.7).

Рассматриваемая задача управления состоит в следующем.

Требуется определить момент времени $T > 0$ *и такие управляющие функции* μ_k, ν_k, $k = 0,\ 2$, *чтобы определяемое ими решение* $u = u(t,\, x)$ *краевой задачи* (5.7) *удовлетворяло условиям*:

$$u(T,\, x) = u_t(T,\, x) \equiv 0, \qquad 0 < x < 1. \tag{5.8}$$

Как показано ниже, *в рассматриваемой задаче управления упругими колебаниями стержня с помощью граничных управляющих воздействий начальные возмущения можно погасить за конечное время* $\big($*в рассматриваемом случае это время равно* $T = a/\pi\big)$, *полагая*

$$\mu_0(t) = \nu_0(t) \equiv 0,\ \ \mu_2(t) = \mu_2^0(t),\ \ \nu_2(t) = \nu_2^0(t),$$

[4] См., например: *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. — М.: Машиностроение, 1986.

[5] См., например: *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниями (обзор)// Оптимизация, управление, интеллект. — 2000. — № 5. — С. 112–121.

где $\mu_2^0(t)$ *и* $\nu_2^0(t)$ *определяются формулами*:

$$\mu_2^0(t) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\psi_n}{n}\cos\frac{n^2\pi^2}{a}\,t - \varphi_n\,n\pi\sin\frac{n^2\pi^2}{a}\,t\right] + C_1, \quad (5.9)$$

$$\nu_2^0(t) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\varphi_n n\pi\sin\frac{n^2\pi^2}{a}\,t - \frac{\psi_n}{n}\cos\frac{n^2\pi^2}{a}\,t\right] - C_1, \quad (5.10)$$

где C_1 *— произвольная постоянная.*

Аналогичным образом решается та же задача успокоения колебаний стержня в случае, когда $\mu_2(t) = \nu_2(t) \equiv 0$, а процесс, описываемый краевой задачей (5.7), управляется внешними воздействиями, определяемыми функциями μ_0 и ν_0 по формулам типа (5.9) и (5.10).

Этот результат можно использовать при решении ряда других задач управления колебаниями упругих систем. Отметим лишь одну из них.

Управляемый процесс описывается краевой задачей:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 < x < 1,\\
&u(0,\, x) = \varphi(x), \qquad u_t(0,\, x) = \psi(x),\\
&u(t,\, 0) = 0, \qquad u_{xx}(t,\, 0) = \mu_2(t),\\
&u(t,\, 1) = 0, \qquad u_{xx}(t,\, 1) = y(t),
\end{aligned} \quad (5.11)$$

где μ_2 — управление того же типа, что и в предыдущей задаче, а $y = y(t)$ определяется с помощью дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dt} = ky + lu(t,\, 1) + mv(t), \qquad y(0) = y^0. \quad (5.12)$$

Здесь $k,\ l,\ m,\ y^0$ — постоянные, а v — управляющая функция того же типа, что и μ_2. Таким образом, речь идет об управлении системой, состоящей из двух взаимодействующих элементов, Один из них — объект с сосредоточенными параметрами, а другой — с распределенными параметрами.

Требуется погасить колебания системы, т.е. найти функции μ_2 *и* v *такие, что соответствующее им решение* $\{u = u(t,\, x),\ y = y(t)\}$ *системы* (5.11), (5.12) *в некоторый* *момент времени $t = T$ удовлетворяет следующим условиям:* $u(T, x) = u_t(T, x) = y(T) = 0$ *при всех* $x \in (0, 1)$.

Решение задачи получается достаточно просто следующими рассуждениями.

Независимо от того, какими соотношениями ограничен выбор функции y, она совместно с μ_2 погасит колебания стержня, если эти две функции будут определяться по формулам (см. (5.9) и (5.10)):

$$\mu_2^0(t) = -\int_0^1 \varphi(x) G_1(t, x)\, dx + \int_0^1 \psi(x) G_2(t, x)\, dx + C_1, \quad (5.13)$$

$$y^0(t) = -\int_0^1 \varphi(x) G\Big(t - \frac{a}{\pi}, x\Big)\, dx + \\ + \int_0^1 \psi(x) G_2\Big(t - \frac{a}{\pi}, x\Big)\, dx - C_1, \quad (5.14)$$

где

$$G_1(t, x) = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \sin n\pi x \, \sin \frac{n^2\pi^2}{a}\, t,$$

$$G_2(t, x) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \cos n\pi x \, \cos \frac{n^2\pi^2}{a} t.$$

Постоянную C_1 выбираем так, чтобы выполнялось условие $y(T) = 0$, где $T = a/\pi$, т. е. полагаем

$$C_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{n} = \int_0^1 \psi(x) G_2(0, x)\, dx.$$

Определив таким образом функцию $y = y(t)$, искомое управление находим по формуле, используя (5.12):

$$v(t) = m^{-1}[\dot{y} - ky - lu(t, 1)]. \quad (5.15)$$

Формулы (5.13) и (5.15) дают решение поставленной задачи. Они определяют управления μ_2 и v, которые полностью гасят колебания за отрезок времени от 0 до a/π. Если сравнить полученный результат с решением аналогичной задачи управления колебаниями струны (см. предыдущий параграф), то здесь просматриваются две важные особенности.

1. Время полного успокоения колебаний стержня более чем в три раза короче времени, в течение которого это можно сделать при управлении колебаниями струны.

2. Возможности управления колебаниями стержня гораздо шире, и при решении задачи они все не используются. Желаемый результат получен с помощью управлений μ_2 и ν_2, а μ_0 и ν_0 были взяты равными нулю.

Формулы (5.13) и (5.14) можно использовать для получения управления по принципу обратной связи. Для этого нужно функции φ и ψ в условиях (5.11) рассматривать как состояние стержня в некоторый момент времени $t = \tau$, т. е. положить $u(\tau, x) = \varphi(x)$, $u_t(\tau, x) = \psi(x)$. Тогда формулы (5.13) и (5.14) можно представить в виде:

$$\mu_2^0(t) = -\int_0^1 \big[u(\tau, x)G_1(t, x) + u_t(\tau, x)G_2(t, x)x - \\ - u_t(\tau, x)G_2(0, x)\big]\,dx,$$

$$y^0(t) = -\int_0^1 \left[u(\tau, x)G_1\left(t - \frac{a}{\pi}, x\right) + u_t(\tau, x)G_2\left(t - \frac{a}{\pi}, x\right) + \\ + u_t(\tau, x)G_2(0, x)\right] dx.$$

Переходя в этих формулах к пределу при $t \to \tau$, получаем управления по принципу обратной связи

$$\mu_2^0[t, u(t,x), u_t(t,x)] = \\ = -\int_0^1 \big[u(t,x)G_1(t,x) + u_t(t,x)G_2(t,x) - u_t(\tau,x)G_2(0,x)\big]\,dx,$$

$$y^0[t, u(t,x), u_t(t,x)] = -\int_0^1 \left[u(t, x)G_1\left(t - \frac{a}{\pi}, x\right) + \right.$$

$$+ u_t(t,\,x)G_2\left(t - \frac{a}{\pi},\,x\right) + u_t(t,\,x)G_2(0,\,x)\Bigg]\,dx.$$

Управление $v = v[t,\,u(t,x),\,u_t(t,x)]$ находим по формуле (5.15).

Доказательство. В предыдущем пункте настоящего параграфа были сформулированы результаты решения задач управления колебаниями стержня. Они заключаются в том, что *если процесс описывается краевой задачей* (5.7) *и управляющими функциями, берутся* μ_2 *и* ν_2, *а* μ_0 *и* ν_0 *полагаются равными нулю, то управления* (5.9) *и* (5.10) *успокаивают колебания стержня за время* $T = a/\pi$.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся тем, что при заданных внешних воздействиях μ_i и ν_i решение задачи (5.7) можно представить в виде:

$$u(t,\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x),$$

$$X_n = \sin n\pi x, \quad u_n(t) - 2\int\limits_0^1 u(t,\,x)\,X_n(x)\,dx.$$

Умножая обе части уравнения колебаний на $X_n(x)$ и интегрируя полученное равенство, с учетом граничных условий приходим к уравнениям:

$$a^2\frac{d^2u_n}{dt^2} + (n\pi)^4u_n = 2n\pi[\nu_2(t)\cos n\pi - \mu_2(t)] + \\ + 2(n\pi)^3[\nu_0(t)\cos n\pi - \mu_0(t)], \quad n = 1,\,2,\,\ldots, \quad (5.16)$$

которые нужно решать с учетом начальных условий:

$$u_n(0) = \varphi_n, \qquad \frac{du_n(0)}{dt} = \psi_n,$$

$$\varphi_n = 2\int\limits_0^1 \varphi(x)\sin n\pi x\,dx, \quad \psi_n = 2\int\limits_0^1 \psi(x)\sin n\pi x\,dx.$$

В уравнениях (5.16) сделаем такую замену: $\tau = \dfrac{\pi}{a}\,t$, $U_n(\tau) = u_n\left(\dfrac{a\tau}{\pi}\right)$. Тогда их можно представить в виде

$$\frac{d^2U_n(\tau)}{d\tau^2}+(n^2\pi)^2U_n(\tau)=\frac{2n}{\pi}\left\{\left[\nu_2\left(\frac{a\tau}{\pi}\right)\cos n\pi-\mu_2\left(\frac{a\tau}{\pi}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+(n\pi)^2\left[\nu_0\left(\frac{a\tau}{\pi}\right)\cos n\pi-\mu_0\left(\frac{a\tau}{\pi}\right)\right]\right\},\quad n=1,\,2,\,\ldots,$$

и, следовательно,

$$U_n(\tau)=\varphi_n\cos n^2\pi\tau+\frac{\psi_n}{n^2\pi}\sin n^2\pi\tau+$$
$$+\frac{2}{n\pi^2}\int_0^\tau\left\{\left[\nu_2\left(\frac{as}{\pi}\right)\cos n\pi-\mu_2\left(\frac{as}{\pi}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+(n\pi)^2\left[\nu_0\left(\frac{as}{\pi}\right)\cos n\pi-\mu_0\left(\frac{as}{\pi}\right)\right]\right\}\sin n^2\pi(\tau-s)\,ds.$$

Представляя решение задачи (5.7) в виде

$$u(t,\,x)=u\left(\frac{a\tau}{\pi},\,x\right)=U(\tau,\,x)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(\tau)\sin n\pi x$$

и учитывая, что система функций $\{\sin n\pi x\}$ полна в $L_2(0,\,1)$, находим, что условия (5.8) выполняются тогда и только тогда, когда

$$\varphi_n\cos n^2\pi T_\tau+\frac{\psi_n}{n^2\pi}\sin n^2\pi T_\tau+$$
$$+\frac{2}{n\pi^2}\int_0^{T_\tau}\left\{\left[\nu_2\left(\frac{as}{\pi}\right)\cos n\pi-\mu_2\left(\frac{as}{\pi}\right)\right]+(n\pi)^2\left[\nu_0\left(\frac{as}{\pi}\right)\cos n\pi+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\nu_0\left(\frac{as}{\pi}\right)\right]\right\}\sin n^2\pi(T_\tau-s)\,ds=0,\quad (5.17)$$

$$-n^2\pi^2\varphi_n\sin n^2\pi T_\tau+\psi_n\cos n^2\pi T_\tau+$$
$$+\frac{2n}{\pi}\int_0^{T_\tau}\left\{\left[\nu_2\left(\frac{as}{\pi}\right)\cos n\pi-\mu_2\left(\frac{as}{\pi}\right)\right]+(n\pi)^2\left[\nu_0\left(\frac{as}{\pi}\right)\cos n\pi-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\mu_0\left(\frac{as}{\pi}\right)\right]\right\}\cos n^2\pi(T_\tau-s)\,ds=0,\quad (5.18)$$

где $T_\tau=\pi T/a$. Если в равенствах (5.17) и (5.18) положить $T_\tau=1$, то их можно записать в виде

$$(-1)^n\varphi_n + \frac{2}{n\pi^2}\left\{\int_0^1 \nu_2\left(\frac{as}{\pi}\right)\cos n\pi \sin n^2\pi(1-s)\,ds - \right.$$

$$-\int_0^1 \mu_2\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right)\sin n^2\pi s\,ds +$$

$$+(n\pi)^2\left[\int_0^1 \nu_0\left(\frac{as}{\pi}\right)\cos n\pi \sin n^2\pi(1-s)\,ds + \right.$$

$$\left.\left. + \int_0^1 \mu_0\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right)\sin n^2\pi s\,ds\right]\right\} = 0,$$

$$(-1)^n\psi_n + \frac{2n}{\pi}\left\{\int_0^1 \nu_2\left(\frac{as}{\pi}\right)\cos n\pi \cos n^2\pi(1-s)\,ds - \right.$$

$$-\int_0^1 \mu_2\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right)\cos n^2\pi s\,ds +$$

$$+(n\pi)^2\left[\int_0^1 \nu_0\left(\frac{as}{\pi}\right)\cos n\pi \cos n^2\pi(1-s)\,ds + \right.$$

$$\left.\left. + \int_0^1 \mu_0\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right)\cos n^2\pi s\,ds\right]\right\} = 0.$$

Поскольку справедливо: $\cos n\pi \sin n^2\pi(1-s) = -\sin n^2\pi s$, $\cos n\pi \cos n^2\pi(1-s) = \cos n^2\pi\ s$, то отсюда получаем два уравнения:

$$(-1)^n\varphi_n - \frac{2}{n\pi^2}\int_0^1 \left\{\left[\mu_2\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right) + \nu_2\left(\frac{as}{\pi}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + (n\pi)^2\left[\mu_0\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right) + \nu_0\left(\frac{as}{\pi}\right)\right]\right\}\sin n^2\pi s\,ds = 0, \quad (5.19)$$

$$(-1)^n\psi_n - \frac{2n}{\pi}\int\limits_0^1 \left\{\left[\mu_2\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right) - \nu_2\left(\frac{as}{\pi}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + (n\pi)^2\left[\mu_0\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right) - \nu_0\left(\frac{as}{\pi}\right)\right]\right\}\cos n^2\pi s\,ds = 0 \quad (5.20)$$

относительно четырех неизвестных функций μ_i и ν_i.

Положим $\mu_0(t) = \nu_0(t) \equiv 0$, т. е. будем управлять процессом с помощью внешних возмущений, определяющих изгиб стержня на его концах при отсутствии их смещения.

В этом случае уравнения (5.19) и (5.20) принимают вид

$$(-1)^n\varphi_n - \frac{2}{n\pi^2}\int\limits_0^1 \left[\mu_2\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right) + \nu_2\left(\frac{as}{\pi}\right)\right]\sin n^2\pi s\,ds = 0, \tag{5.21}$$

$$(-1)^n\psi_n - \frac{2n}{\pi}\int\limits_0^1 \left[\mu_2\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right) - \nu_2\left(\frac{as}{\pi}\right)\right]\cos n^2\pi s\,ds = 0. \tag{5.22}$$

Так как

$$\int\limits_0^1 \mu_2\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right)\cos n^2\pi s\,ds =$$

$$= -\frac{1}{n^2\pi}\int\limits_0^1 \frac{d}{ds}\left[\mu_2'\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right)\right]\sin n^2\pi s\,ds,$$

$$\int\limits_0^1 \nu_2\left(\frac{as}{\pi}\right)\cos n^2\pi s\,ds - \frac{1}{n^2\pi}\int\limits_0^1 \frac{d}{ds}\left[\nu_2'\left(\frac{as}{\pi}\right)\right]\sin n^2\pi s\,ds,$$

то уравнение (5.22) можно представить в виде

$$(-1)^n n\pi^2\psi_n + 2\int\limits_0^1 \frac{d}{ds}\left[\mu_2'\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right)\right]\sin n^2\pi s\,ds -$$

$$-2\int_0^1 \frac{d}{ds}\left[\nu_2'\left(\frac{as}{\pi}\right)\right]\sin n^2\pi s\,ds = 0. \tag{5.23}$$

Функции $\mu_i\left(\dfrac{a(1-s)}{\pi}\right)$ и $\nu_2\left(\dfrac{as}{\pi}\right)$ разложим в ряды Фурье по системе $\{\sin n\pi s\}$:

$$\mu_2\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_{2n}\sin n\pi s, \quad \nu_2\left(\frac{as}{\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\nu_{2n}\sin n\pi s,$$

$$\mu_{2n} = 2\int_0^1 \mu_2\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right)\sin n\pi s\,ds,\ \ \nu_{2n} = 2\int_0^1 \nu_2\left(\frac{as}{\pi}\right)\sin n\pi s\,ds.$$

Следовательно, можно записать

$$\mu_2\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right) = \mu_2^0\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right) + \mu_2^1\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right),$$

где $\mu_2^0\left(\dfrac{a(1-s)}{\pi}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_{2n^2}\sin n^2\pi s$, а функция $\mu_2^1\left(\dfrac{a(1-s)}{\pi}\right)$ определяется остальными слагаемыми ряда.

Аналогично имеем $\nu_2\left(\dfrac{as}{\pi}\right) = \nu_2^0\left(\frac{as}{\pi}\right) + \nu_2^1\left(\dfrac{as}{\pi}\right)$, где $\nu_2^0\left(\dfrac{as}{\pi}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu_{2n^2}\sin n^2\pi s.$

Умножим равенства (5.21) и (5.23) на $\sin n^2\pi s$, а затем просуммируем их по всем $n = 1,\ 2,\ \ldots$ В итоге будем иметь

$$\mu_2^0\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right) + \nu_2^0\left(\frac{as}{\pi}\right) = \varphi^0(s), \tag{5.24}$$

$$\frac{d}{ds}\left[\mu_2^0\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right)\right] - \frac{d}{ds}\left[\nu_2^0\left(\frac{as}{\pi}\right)\right] = \psi^0(s), \tag{5.25}$$

где

$$\begin{gathered}\varphi^0(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\pi^2\varphi_n\sin n^2\pi s,\\ \psi^0(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n\pi^2\psi_n\sin n^2\pi s.\end{gathered} \tag{5.26}$$

Интегрируя равенство (5.25) в пределах от 0 до s, будем иметь

$$\mu_2^0\left(\frac{a(1-s)}{\pi}\right) - \nu_2^0\left(\frac{as}{\pi}\right) = \int\limits_0^s \psi^0(s)\,ds + C, \tag{5.27}$$

где C — произвольная постоянная. Решая систему уравнений (5.24) и (5.27), получаем:

$$\mu_2^0(t) = \frac{1}{2}\left[\varphi^0\left(\frac{a-\pi t}{a}\right) + \int\limits_0^{(a-\pi t)/a} \psi^0(s)\,ds\right] + C_0,$$

$$\nu_2^0(t) = \frac{1}{2}\left[\varphi^0\left(\frac{at}{\pi}\right) - \int\limits_0^{\pi t/a} \psi^0(s)\,ds\right] - C_0, \quad C_0 = \frac{C}{2}.$$

Так как функции φ и ψ определяются формулами (5.26), то отсюда окончательно получаем:

$$\mu_2^0(t) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\psi_n}{n}\cos\frac{n^2\pi^2}{a}\,t - \varphi\,n\pi\sin\frac{n^2\pi^2}{a}\,t\right] + C_1, \tag{5.28}$$

$$\nu_2^0(t) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\varphi_n n\pi\sin\frac{n^2\pi^2}{a}\,t - \right.$$
$$\left. - \frac{\psi_n}{n}\cos\frac{n^2\pi^2}{a}\,t\right] - C_1. \tag{5.29}$$

Этот результат означает, что в рассматриваемой задаче управления колебаниями стержня с помощью граничных управляющих воздействий начальные возмущения можно погасить за конечное время (в рассматриваемом случае это время равно $T = a/\pi$), полагая:

$$\mu_0(t) = \nu_0(t) \equiv 0, \quad \mu_2(t) = \mu_2^0(t),\ \nu_2(t) = \nu_2^0(t),$$

где $\mu_2^0(t)$ и $\nu_2^0(t)$ определяются формулами (5.28) и (5.29).

Глава 7

Системы с распределенными и сосредоточенными параметрами

1. Системы из связанных объектов

Будем рассматривать систему, состоящую из двух объектов. Колебания одного объекта описываются волновым уравнением с граничными условиями первого рода. Колебания другого объекта описаны обыкновенными дифференциальными уравнением второго порядка. Это уравнение содержит слагаемое, характеризующее объект с распределенными параметрами. Такая обратная связь присуща системам с ограниченным возбуждением.

Подобные системы естественны для задач, описывающих колебания газа в длинных трубопроводах или электромагнитных колебаний в длинных электрических линиях, управление процессами в которых осуществляется устройствами с сосредоточенными параметрами. Очевидно, что математическое описание этих устройств может быть получено в виде достаточно сложных обыкновенных дифференциальных уравнений или систем таких уравнений.

Здесь рассматривается максимально простая математическая модель. Колебания в длинной линии описываются волновым уравнением. Связанный с этой линией объект с сосредоточенными параметрами описываются уравнением второго порядка. Взаимодействие между этими объектами происходит на конце длинной линии. Такая постановка математической задачи представляется естественной с прикладной точки зрения.

1.1. Постановка краевых задач.

1.1.1. *Система с граничным воздействием через объект с сосредоточенными параметрами.* Рассмотрим колебания системы, описываемые следующей краевой задачей:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell, \tag{1.2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = y(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.3}$$

$$\ddot{y}(t) + (ak)^2 y(t) = \nu(t) + b u_x(\ell,t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.4}$$

$$y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = y^1. \tag{1.5}$$

Здесь левая граница системы закреплена, а к правой границе прикреплен объект с сосредоточенными параметрами и там же осуществляется граничное воздействие на систему.

Если из условий (1.3)–(1.4) исключить переменную y, то их можно представить в виде:

$$\begin{gathered} u(0,t) = 0, \quad u_{tt}(\ell,t) - b\, u_x(\ell,t) + (ak)^2 u(\ell,t) = \nu(t), \\ u(\ell,0) = y^0, \quad u_t(\ell,0) = y^1. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Из согласования начальных и граничных условий получаем следующие равенства:

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \\ \varphi(\ell) = y^0, \quad \psi(\ell) = y^1, \\ \nu(0) = a^2\varphi''(\ell) - b\varphi'(\ell) + (ak)^2\varphi(\ell). \end{cases} \tag{1.7}$$

Решение начальной задачи (1.4)–(1.5) имеет вид

$$y(t) = y^0 \cos akt + \frac{y^1}{ak}\sin akt + \\ + \frac{1}{ak}\int\limits_0^t \big[\,\nu(t) + b u_x(\ell,\tau)\big] \sin ak(t-\tau)\, d\tau.$$

1.1.2. *Системы с непосредственным граничным воздействием.* Также будем рассматривать систему, колебания которой описываются следующей краевой задачей:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1.8}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell, \tag{1.9}$$

$$u(0,t) = \nu(t), \quad u(\ell,t) = y(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.10}$$

$$\ddot{y}(t) + (ak)^2 y(t) = b u_x(\ell,t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.11}$$

$$y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = y^1. \tag{1.12}$$

В этом случае граничные условия (1.10)–(1.12) можно переписать в следующем виде:

$$u(0,t) = \nu(t), \quad u_{tt}(\ell,t) - b\, u_x(\ell,t) + (ak)^2 u(\ell,t) = 0,$$
$$u(\ell,0) = y^0, \quad u_t(\ell,0) = y^1.$$

Аналогично можно найти равенства, дающие согласование начальных и граничных условий:

$$\varphi(0) = \nu(0), \quad \psi(0) = \nu'(0), \quad a^2\varphi''(0) = \nu''(0),$$
$$\varphi(\ell) = y^0, \quad \psi(\ell) = y^1,$$
$$a^2\varphi''(\ell) - b\varphi'(\ell) + (ak)^2\varphi(\ell) = 0.$$

Найдем решение начальной задачи (1.11)–(1.12). Ее решение $y(t)$ имеет следующий вид:

$$y(t) = y^0 \cos akt + \frac{y^1}{ak}\sin akt + \frac{b}{ak}\int\limits_0^t u_x(\ell,\tau)\sin ak(t-\tau)\,d\tau.$$

1.2. Постановка задач граничной управляемости и наблюдаемости. Сначала сформулируем задачу гашения колебаний для системы с граничным воздействием через объект с сосредоточенными параметрами.

З а д а ч а у п р а в л я е м о с т и. *Найти период времени T и функцию $\nu(t)$ такие, что решение $u = u(x,t)$ задачи* (1.1)–(1.5) *с начальными значениями* (1.2) *в момент времени T принимает нулевые финальные значения*:

$$u(x,T) = 0, \quad u_t(x,T) = 0. \tag{1.13}$$

Для системы с непосредственным граничным воздействием задача управляемости формулируется аналогичным образом.

З а д а ч а у п р а в л я е м о с т и. *Найти период времени* T *и функцию* $\nu(t)$ *такие, что решение* $u = u(x,t)$ *задачи* (1.8)–(1.12) *с начальными значениями* (1.9) *в момент времени* T *принимает нулевые финальные значения* (1.13).

Как уже отмечалось ранее, задача наблюдаемости является обратной к задаче управляемости. Граничные условия:

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = y(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.14}$$

$$\ddot{y}(t) + (ak)^2 y(t) = bu_x(\ell,t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.15}$$

$$y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = y^1. \tag{1.16}$$

назовем *однородными граничными условиями*.

З а д а ч а н а б л ю д а е м о с т и. *Найти период времени* T *и начальное состояние* (1.2) *объекта, колебания которого описываются уравнением* (1.1) *и однородными краевыми условиями* (1.14)–(1.16)*, по результатам граничного наблюдения*

$$u_x(t,0) = z_1(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.17}$$

2. Решение краевых задач для систем с распределенными и сосредоточенными параметрами

2.1. Система с граничным воздействием через объект с сосредоточенными параметрами. Будем искать решение краевой задачи (1.1)–(1.5) в виде (2.2). Причем функции E и G при $0 \leqslant z \leqslant \ell$ имеют вид (2.3).

Чтобы определить функцию E для $z > \ell$ и функцию G для $z < 0$, воспользуемся выражениями (1.6). Первое равенство из (1.6) дает

$$G(-z) = -E(z), \qquad z > 0. \tag{2.1}$$

Таким образом, функция G определена для отрицательных аргументов.

Полученная функция G дважды непрерывно дифференцируема в точке $z = 0$. Для этого необходимо проверить следующие равенства:

$$G(+0) = G(-0), \quad G'(+0) = G'(-0), \quad G''(+0) = G''(-0).$$

Их проверяем непосредственно, используя равенства (2.3), (2.1) и условия (1.7). Действительно,

$$G(-0) = -E(0) = -\frac{\varphi(0)}{2}, \quad G(+0) = \frac{\varphi(0)}{2}, \qquad \varphi(0) = 0;$$

$$G'(-0) = E'(0) = \frac{\varphi'(0)}{2} + \frac{\psi(0)}{2a},\ G'(+0) = \frac{\varphi'(0)}{2} - \frac{\psi(0)}{2a}, \qquad \psi(0) = 0;$$

$$G''(-0) = -E''(0) = -\frac{\varphi''(0)}{2} - \frac{\psi'(0)}{2a},$$
$$G''(+0) = \frac{\varphi''(0)}{2} - \frac{\psi'(0)}{2a}, \qquad \varphi''(0) = 0.$$

Проанализируем теперь свойства решения (2.2) в некоторой окрестности точки $x = \ell$. Подставляя функцию (2.2) во второе условие (1.6), получаем уравнение для $t > 0$:

$$a^2[E''(\ell + at) + G''(\ell - at)] - b[E'(\ell + at) + G'(\ell - at)] + \\ + (ak)^2[E(\ell + at) + G(\ell - at)] = \nu(t). \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) можно представить в виде

$$\mathscr{M}[E(\ell + at) + G(\ell - at)] = \nu(t) + 2bG'(\ell - at), \qquad (2.3)$$

где оператор $\mathscr{M}$ имеет вид

$$\mathscr{M}y(t) = y''(t) - \frac{b}{a}\,y'(t) + (ak)^2\,y(t). \qquad (2.4)$$

Пусть $y_1(z)$ и $y_2(z)$ — линейно независимые решения уравнения

$$\mathscr{M}y(t) = 0, \qquad (2.5)$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1. \qquad (2.6)$$

Введем функцию

$$K(z, s) = \frac{y_2(z)y_1(s) - y_1(z)y_2(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_2(s)y_1'(s)}. \qquad (2.7)$$

Соотношение (2.3) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно E при $z > \ell$. Его общее решение можно записать в виде

$$E(\ell + at) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) - G(\ell - at) + \\ + \int_0^t K(t,\tau)\left[\nu(\tau) + 2bG'(\ell - a\tau)\right] d\tau, \quad (2.8)$$

здесь $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — линейно независимые решения уравнения (2.5) со свойствами (2.6), а $K(t,\tau)$ определяется формулой (2.7).

Постоянные c_1 и c_2 выберем из условий непрерывности $E(z)$ и $E'(z)$ в точке $z = \ell$. Первое из этих условий означает, что выполнено равенство $E(\ell + 0) - E(\ell - 0) = 0$. Это равенство в силу формул (2.6) и (2.8) принимает следующий вид:

$$c_1 - G(\ell - 0) - E(\ell - 0) = 0.$$

Учитывая выражения (2.3) отсюда получаем $c_1 = \varphi(\ell)$. Условие непрерывности первой производной функции $E(z)$ в точке $z = \ell$ записываем в виде $E'(\ell+0) - E'(\ell-0) = 0$. При найденном значении c_1 производную функции $E(z)$ можно представить так

$$aE'(\ell + at) = \varphi(\ell) y_1'(t) + c_2 y_2'(t) + aG'(\ell - at) + \\ + \int_0^t K_t(t,\tau)\left[\nu(\tau) + 2bG'(\ell - a\tau)\right] ds.$$

Здесь мы учли тот факт, что $K(t,t) \equiv 0$, который следует из вида функции (2.7). Отсюда получаем условие непрерывности производной E' в точке $z = \ell$. Это условие имеет следующий вид:

$$c_2 + a[G'(\ell - 0) - E'(\ell - 0)] = 0.$$

По формулам (2.3) находим, что $c_2 = \psi(\ell)$. В формуле (2.8) сделаем следующие замены: $z = \ell + at$, $s = \ell + a\tau$. Таким образом, функция E представима выражением

$$E(z) = Y(z) - G(2\ell - z) + \\ + \frac{1}{a}\int\limits_{l}^{z} K\left(\frac{z-\ell}{a}, \frac{s-\ell}{a}\right)\left[\nu\left(\frac{s-\ell}{a}\right) + \\ + 2bG'(2\ell - s)\right] ds. \quad (2.9)$$

Значение функции E в (2.9) получено для $z > \ell$, где $G(z)$ определяется формулами (2.3) и (2.1). Функция E непрерывна и имеет непрерывную производную E'. В равенстве (2.9) использовано обозначение

$$Y(z) = \varphi(\ell)\, y_1\left(\frac{z-\ell}{a}\right) + \psi(\ell)\, y_2\left(\frac{z-\ell}{a}\right). \quad (2.10)$$

Докажем, что функция E, определяемая формулами (2.3) и (2.9), дважды непрерывно дифференцируема в точке $z = \ell$. Из формулы (2.9) следует, что

$$E''(z) = Y''(z) - G''(2\ell - z) + \\ + \frac{1}{a^3}\int\limits_{l}^{z} K_{zz}\left(\frac{z-\ell}{a}, \frac{s-\ell}{a}\right)\left[\nu\left(\frac{s-l}{a}\right) + 2bG(2\ell - s)\right] ds + \\ + \frac{1}{a^2}\left[\nu\left(\frac{z-\ell}{a}\right) + 2bG'(2\ell - z)\right], \quad z \geqslant \ell.$$

Здесь учтен тот факт, что $K_z(z,z) = 1$.

Поскольку выполнено последнее равенство из (1.7), то

$$\varphi(\ell)y_1''(0) + \psi(\ell)y_2''(0) = \frac{b}{a}\,\psi(\ell) - (ak)^2\varphi(\ell).$$

Заметим, что функции $y_1(z)$ и $y_2(z)$ являются линейно независимыми решениями однородного уравнения (2.5), удовлетворяющими начальным условиям (2.6), таким образом, левая часть полученного равенства равна правой части. Следовательно, функция $E(z)$ дважды непрерывно дифференцируема в точке $z = \ell$.

Итак, справедлива теорема.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия:*

$$\varphi(x) \in C^2[0,l], \quad \psi(x) \in C^1[0,\ell],$$
$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0, \quad \psi(0) = 0,$$
$$\varphi(\ell) = y^0, \quad \psi(\ell) = y^1.$$

Тогда каждая дважды непрерывно дифференцируемая при $t \geqslant 0$ функция ν, удовлетворяющая условию

$$\nu(0) = a^2\varphi''(\ell) - b\varphi'(\ell) + (ak)^2\varphi(\ell),$$

однозначно определяет единственное решение $u = u(x,t)$ краевой задачи (1.1)–(1.5). *Это решение задается равенством* (2.2). *При этом на отрезке* $[0, \ell]$ *функции E и G представимы выражениями* (2.3). *Для отрицательных аргументов функция G имеет вид* (2.1) *при $z > 0$, а для аргументов, больших ℓ, функция E имеет вид* (2.9), *в этом равенстве $z > \ell$.*

2.2. Система с непосредственным граничным воздействием. Для этой системы справедлива теорема, которая доказывается аналогично теореме 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия*:

$$\begin{aligned} &\varphi(x) \in C^2[0,\ell], \quad \psi(x) \in C^1[0,\ell], \\ &\varphi(\ell) = y^0, \quad \psi(\ell) = y^1, \\ &a^2\varphi''(\ell) - b\varphi'(\ell) + (ak)^2\varphi(\ell) = 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Тогда каждая дважды непрерывно дифференцируемая при $t \geqslant 0$ функция ν, удовлетворяющая условиям:

$$\nu(0) = \varphi(0), \quad \nu'(0) = \psi(0), \quad \nu''(0) = a^2\varphi''(0), \tag{2.12}$$

однозначно определяет единственное решение $u = u(t,x)$ краевой задачи (1.8)–(1.12), *которое представимо в виде* (2.2). *Функции E и G при каждом $0 \leqslant z \leqslant \ell$ имеют вид* (2.3). *Функция G для отрицательных аргументов представима следующим выражением:*

$$G(-z) = \nu\left(\frac{z}{a}\right) - E(z), \tag{2.13}$$

здесь $z > 0$. *Для* $z > \ell$ *выполняется*

$$E(z) = Y(z) - G(2\ell - z) + \\ + \frac{2b}{a} \int\limits_{\ell}^{z} K\left(\frac{z-\ell}{a}, \frac{s-\ell}{a}\right) G'(2\ell - s)\, ds. \quad (2.14)$$

Здесь использованы обозначения из (2.7) *и* (2.10).

2.3. Конечномерная аппроксимация задачи управляемости системой с непосредственным граничным воздействием. Построим конечномерную аппроксимацию задачи (1.8)–(1.12), используя метод прямых в теории приближенных решений краевых задач.

Пусть $\{x_m = mh\}$, $m = 0, \ldots, n$, — сетка с заданным шагом $h = \ell/n$ на сегменте $[0,\ \ell]$. Обозначим $u_m(t) = u(x_m, t)$, $m = 0, \ldots, n$, тогда

$$u_x(x_m, t) \approx \frac{u_m(t) - u_{m-1}(t)}{h}, \quad m = 1, \ldots, n,$$

$$u_{xx}(x_m, t) \approx \frac{u_{m+1}(t) - 2u_m(t) + u_{m-1}(t)}{h^2}, \ m = 1, \ldots, n-1.$$

и $u_0(t) = \nu(t)$, $u_n(t) = y(t)$, $u_m(0) = \varphi(x_m)$, $\dot{u}_m(0) = \psi(x_m)$ Поэтому аппроксимацию задачи (1.8)–(1.12) можно брать в виде:

$$\ddot{u}_1(t) = \frac{a^2}{h^2}[u_2(t) - 2u_1(t) + \nu(t)],$$

$$\ddot{u}_m(t) = \frac{a^2}{h^2}\left[u_{m+1}(t) - 2u_m(t) + u_{m-1}(t)\right], \ m = 2, \ldots, n-1,$$

$$u_0(t) = \nu(t), \quad \ddot{u}_n(t) + (ak)^2 u_n(t) = \frac{b}{h}\left[u_n(t) - u_{n-1}(t)\right],$$

где $\varphi_m = \varphi(x_m)$ и $\psi_m = \psi(x_m)$.

От полученной системы перейдем к системе первого порядка с помощью замены $\dot{u}_k(t) = v_k(t)$, получаем:

$$\dot{w}(t) = \mathscr{A}\, w(t) + \mathscr{B}\, \nu(t), \quad (2.15)$$

$$w(0) = w^0, \quad (2.16)$$

где $w(t)$, $\dot{w}(t)$, $\mathscr{B}$ и w^0 — вектор-столбцы размерности $2n$, $\mathscr{A}$ — матрица размерности $2n \times 2n$, причем

$$w(t) = \{u_1(t), \ldots, u_n(t), v_1(t), \ldots, v_n(t)\},$$
$$\dot w(t) = \{\dot u_1(t), \ldots, \dot u_n(t), \dot v_1(t), \ldots, \dot v_n(t)\}, \qquad \mathscr{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$
$$w^0 = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_n\},$$

Вектор-столбец $\mathscr{B} = \{\overbrace{0, \ldots, 0}^{n}, a^2/h^2, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-1}\}$, имеет значение a^2/h^2 на месте $n+1$, а остальные его элементы равны нулю; матрица $\mathbf{0}$ — нулевая матрица размерности $n \times n$; $\boldsymbol{E}$ — единичная матрица размерности $n \times n$. Матрица $\boldsymbol{C}$ размерности $n \times n$ имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} -2r & r & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ r & -2r & r & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & r & -2r & r & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -2r & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & r & -2r \end{pmatrix}, \quad r = a^2/h^2.$$

Задача гашения колебаний заключается в следующем: *необходимо перевести систему* (2.15) *за промежуток времени T с помощью управляющего воздействия $\nu(t)$ из начального состояния* (2.16) *в состояние покоя $w(T) = 0$.*

Критерием управляемости системы (2.15) является следующее утверждение (см., например, [**229**]): *система* (2.15) *управляема в том и только в том случае, когда выполнено* $\operatorname{rank} \mathscr{W} = 2n$, *где* $\mathscr{W} = (\mathscr{B}\ \mathscr{A}\mathscr{B}\ \mathscr{A}^2\mathscr{B}\ \ldots\ \mathscr{A}^{2n-1}\mathscr{B})$.

Обозначим столбцы матрицы $\mathscr{W}$ через $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_n$, полагая

$$\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}, \quad \mathscr{B}_2 = \mathscr{A}\mathscr{B}_1, \quad \ldots, \quad \mathscr{B}_n = \mathscr{A}\mathscr{B}_{n-1}.$$

Тогда непосредственными вычислениями находим, что

$$\mathscr{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ r \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{B}_2 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ -2r^2 \\ r^2 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{B}_4 = \begin{pmatrix} -2r^2 \\ r^2 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{B}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 5r^3 \\ -4r^3 \\ r^3 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \tag{2.17}$$

Переставляя столбцы в матрице $\mathscr{W}$, получим матрицу

$$\mathscr{W}_1 = (\mathscr{B}_2\ \mathscr{B}_4\ \dots\ \mathscr{B}_{2n}\ \mathscr{B}_1\ \mathscr{B}_3\ \mathscr{B}_5\ \dots\ \mathscr{B}_{2n-1}).$$

Учитывая (2.17), эту матрицу можно представить в виде

$$\mathscr{W}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_1 \end{pmatrix}, \text{ где } \boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} r & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & r^2 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & r^3 & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r^n \end{pmatrix},$$

c_{ij} — некоторые постоянные. Поэтому ранг матрицы $\mathscr{W}$ равен $2n$.

Тем самым доказано, что для любого промежутка времени T найдется управляющая функция $\nu(t)$, которая переведет систему (2.15) из начального состояния (2.16) в состояние покоя.

Для исходной системы (1.8)–(1.12) задача гашения колебаний решается для периода времени $T = 2\ell/a$. Этот факт говорит о том, что решение задачи гашения колебаний для системы (2.15) с начальным состоянием (2.16) не является приближенным решением задачи гашения колебаний для системы (1.8)–(1.12).

Замечание 2.1. Конечномерную аппроксимацию задачи (1.8)–(1.12) можно было также попытаться получить с помощью метода Фурье. Однако задача Штурма–Лиувилля для системы (1.8)–(1.12) дает совокупность собственных функций, которые не являются ортогональными.

3. Решение задачи управляемости для систем с распределенными и сосредоточенными параметрами

Теперь воспользуемся результатами предыдущего параграфа для решения задачи гашения колебаний.

3.1. Система с граничным воздействием через объект с сосредоточенными параметрами. Докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Для любых функций начального состояния* $\varphi \in C^2[0,\ell]$ *и* $\psi \in C^1[0,\ell]$, *удовлетворяющих условиям* (1.7) *и*

$$a^2 E''(\ell) - bE'(\ell) = 0, \tag{3.1}$$

удается погасить колебания системы (1.1)–(1.5) *за время* T, *равное* $2\ell/a$. *При этом граничное управление* $\nu \in C[0,T]$ *имеет следующий вид:*

$$\nu(t) = (ak)^2 E(\ell) + a^2 G''(\ell - at) - b\,G'(\ell - at) + \\ + (ak)^2 G(\ell - at). \tag{3.2}$$

Доказательство. Будем искать управление, которое определяет решение $u = u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.5), удовлетворяющее условию (1.7) при $T = 2\ell/a$. Это решение определяется формулой (2.2), в которой функции E и G выражаются через φ и ψ. Условия (1.7) при $T = 2\ell/a$ с помощью формулы (2.2) можно представить в виде

$$E(x+2\ell)+G(x-2\ell) = 0, \quad E'(x+2\ell)-G'(x-2\ell) = 0, \tag{3.3}$$

где функции E при $2\ell \leqslant z \leqslant 3\ell$ и G при $-2\ell \leqslant z \leqslant -\ell$ определяются формулами (2.9) и (2.1) соответственно. Проинтегрируем вторую формулу в (3.3), сделав соответствующие преобразования, получаем следующее выражение для нахождения управляющего воздействия ν:

$$E(z) = C, \qquad \ell \leqslant z \leqslant 3\ell. \tag{3.4}$$

Константа C в выражении (3.4) равна $E(\ell)$, причем функция E определяется с помощью формулы (2.9).

Рассмотрим равенство

$$a^2 E''(z) - bE'(z) + (ak)^2 E(z) = (ak)^2 E(\ell),$$

которое получается из (3.4). Затем воспользуемся видом (2.9) функции E и находим управление ν:

$$\nu\Big(\frac{z-\ell}{a}\Big) = (ak)^2 E(\ell) + a^2 G''(2\ell - z) - bG'(2\ell - z) + \\ + (ak)^2 G(2\ell - z).$$

При этом учитывалось, что ядро $K(z, s)$ по переменной z удовлетворяет уравнению (2.5). Сделаем следующую замену: $(z-\ell)/a = t$, получаем выражение (3.2). При условии (3.1) полученная функция удовлетворяет равенству (1.7).

3.2. Система с непосредственным граничным воздействием. Будем искать управление, которое определяет решение $u = u(x,t)$ задачи (1.8)–(1.12), удовлетворяющее условию (1.13) при $T = 2\ell/a$. Это решение определяется формулой (2.2), в которой функции E и G выражаются через ν, φ и ψ по формулам (2.3), (2.14) и (2.13). Условия (1.13) при $T = 2\ell/a$ с помощью формулы (2.2) можно представить в виде:

$$E(x+2\ell)+G(x-2\ell) = 0, \quad E'(x+2\ell)-G'(x-2\ell) = 0, \tag{3.5}$$

для $0 \leqslant x \leqslant \ell$, где функция E при $2\ell \leqslant z \leqslant 3\ell$ и функция G при $-2\ell \leqslant z \leqslant 0$ определяются формулами (2.14) и (2.13). Интегрируя по x второе из равенств (3.5), получаем

$$E(x+2\ell) + G(x-2\ell) = 0, \quad E(x+2\ell) - G(x-2\ell) = 2C,$$

где C — произвольная постоянная. Следовательно,

$$E(x+2\ell) = C, \quad G(x-2\ell) = -C, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell. \tag{3.6}$$

Вторую из этих формул преобразуем, используя соотношение (2.13). Результат можно представить в виде

$$\nu\,(t) = E(at) - C, \qquad \frac{\ell}{a} \leqslant t \leqslant \frac{2\ell}{a}. \tag{3.7}$$

Первое уравнение из (3.6) с учетом формулы (2.14) записываем в виде

$$Y(x+2\ell) - G(-x) + \frac{2b}{a}\int\limits_{\ell}^{x+2\ell} K\left(\frac{x+\ell}{a}, \frac{s-\ell}{a}\right) G'(2\ell - s)\, ds = C,$$

где $0 \leqslant x \leqslant \ell$. Это уравнение представим следующим образом:

$$Y(x+2\ell) - G(-x) + \frac{2b}{a}\int\limits_{-\ell}^{x} K\left(\frac{x+\ell}{a}, \frac{\tau+\ell}{a}\right) G'(-\tau)\,d\tau = C.$$

Функция G определяется формулами (2.3) и (2.13). Поэтому полученное уравнение можно записать

$$\nu\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{2b}{a^2}\int\limits_{0}^{x} K\left(\frac{x+\ell}{a}, \frac{\tau+\ell}{a}\right) \nu'\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau = F(x), \quad (3.8)$$

где $0 \leqslant x \leqslant \ell$ и

$$F(x) = Y(x+2\ell) + E(x) + \\ + \frac{2b}{a}\int\limits_{0}^{x} K\left(\frac{x+\ell}{a}, \frac{\tau+\ell}{a}\right) E'(\tau)\,d\tau + \\ + \frac{2b}{a}\int\limits_{-\ell}^{0} K\left(\frac{x+\ell}{a}, \frac{\tau+\ell}{a}\right) G'(-\tau)\,d\tau - C.$$

Полагая $x = at$, $\tau = as$, уравнение (3.8) перепишем в виде

$$\nu(t) + \frac{2b}{a}\int\limits_{0}^{t} K\left(\frac{at+\ell}{a}, \frac{as+\ell}{a}\right) \nu'(s)\,ds = f(t), \quad (3.9)$$

где $0 \leqslant t \leqslant \ell/a$ и

$$f(t) = Y(at+2\ell) + 2b\int\limits_{0}^{t} K\left(\frac{at+\ell}{a}, \frac{as+\ell}{a}\right) E'(as)\,ds + \\ + 2b\int\limits_{-\ell/a}^{0} K\left(\frac{at+\ell}{a}, \frac{as+\ell}{a}\right) G'(-as)\,ds + E(at) - C.$$

Так как $K(z,s)$ определяется по формуле (2.7) и определяет решение $y(t) = \int\limits_0^t K(t,\tau)v(\tau)\,d\tau$ неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $\mathscr{M}y(t) = v(t)$. Здесь оператор $\mathscr{M}$ имеет вид (2.4), следовательно, существует функция $K_1(t)$ такая, что имеет место следующее равенство: $K(t,\tau) = K_1(t-\tau)$. Поэтому уравнение (3.9) можно представить в виде

$$\nu(t) + \frac{2b}{a}\int\limits_0^t K_1(t-s)\nu'(s)\,ds = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\ell}{a}, \tag{3.10}$$

где

$$f(t) = Y(at+2\ell) + E(at) + 2b\int\limits_0^t K_1(t-s)E'(as)\,ds + {} \\ + 2b\int\limits_{-\ell/a}^0 K_1(t-s)G'(-as)\,ds - C. \tag{3.11}$$

Далее воспользуемся операционным исчислением. Для этого будем предполагать, что в уравнении (3.10) переменная t может принимать все неотрицательные значения. Введем обозначения:

$$\bar{\nu}(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\nu(t)\,dt, \qquad \bar{K}_1(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}K_1(t)\,dt$$

и, наконец, $\bar{f}(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$. С помощью оператора свертки получаем равенство

$$\bar{\nu}(p) = \frac{2\,b}{a}\,\frac{\nu(0)}{1+\dfrac{2b}{a}\,p\,\bar{K}_1(p)}\,\bar{K}_1(p) + \frac{1}{1+\dfrac{2b}{a}\,p\,\bar{K}_1(p)}\,\bar{f}(p).$$

Отсюда следует, что

$$\nu(t) = \frac{2b}{a}\,\nu(0)R_1(t) + \int\limits_0^t R_2(t-s)f(s)\,ds, \quad t \geqslant 0,$$

где функции R_1 и R_2 определяются соотношениями:

$$\int\limits_0^\infty e^{-p\,t}R_1(t)\,dt = \frac{\bar{K}_1(p)}{1+\dfrac{2b}{a}\,p\,\bar{K}_1(p)},$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-p\,t}R_2(t)\,dt = \frac{1}{1+\dfrac{2b}{a}\,p\,\bar{K}_1(p)}.$$

Структура функции ν существенно зависит от типа корней характеристического уравнения $p^2 - \dfrac{b}{a}\,p + (ak)^2 = 0$.

Рассмотрим возможные варианты.

1. *Случай комплексных корней.* Предположим, что характеристическое уравнение $p^2 - \dfrac{b}{a}\,p + (ak)^2 = 0$ имеет комплексные корни, т. е. $4a^4k^2 - b^2 > 0$,

$$p_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \alpha = \frac{b}{2a},\ \beta = \alpha\varkappa,\ \varkappa = \sqrt{\left(\frac{2a^2k}{b}\right)^2 - 1}. \quad (3.12)$$

В этом случае решения

$$y_1(t) = e^{\alpha t}\left[\cos\beta t - \frac{\alpha}{\beta}\,\sin\beta t\right], \quad y_2(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\beta}\,\sin\beta t$$

уравнения (2.5) удовлетворяют условиям (2.6), а функция $K(t,s)$ из (2.7) определяется по формуле

$$K(t,s) = \frac{1}{\beta}\,e^{\alpha(t-s)}\sin\beta(t-s).$$

Поэтому ядро K в уравнении (3.9) можно представить в виде

$$K\left(\frac{at+\ell}{a}, \frac{as+\ell}{a}\right) = e^{\alpha(t-s)}\,\frac{\sin\beta(t-s)}{\beta}$$

и, следовательно, в уравнении (3.10) можно положить

$$K_1(t-s) = e^{\alpha(t-s)}\,\frac{\sin\beta(t-s)}{\beta}. \tag{3.13}$$

Уравнение (3.10) записываем в виде

$$\nu(t) + \frac{2b}{a\beta}\int\limits_0^t e^{a\alpha(t-s)}\sin a\beta(t-s)\,\nu'(s)\,ds = f(t). \tag{3.14}$$

Так как

$$\bar{K}_1(p) = \int\limits_0^\infty e^{-p\,t}\left[e^{\alpha t}\sin\beta t)\right]\,dt = \frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2},$$

то уравнение в изображениях, соответствующее уравнению (3.14), можно представить в виде

$$\left[1+\frac{2b}{a}\frac{p}{(p-\alpha)^2+\beta^2}\right]\bar{\nu}(p) = \bar{f}(p) + \frac{2b\,\nu(0)}{a}\frac{1}{(p-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\bar{\nu}(p) = \frac{(p-\alpha)^2+\beta^2}{(p-\alpha)^2+\dfrac{2b}{a}\,p+\beta^2}\bar{f}(p) + \frac{2b\nu(0)}{a}\frac{1}{(p-\alpha)^2+\dfrac{2b}{a}\,p+\beta^2}. \tag{3.15}$$

Так как, согласно формулам (3.12), имеет место следующее равенство: $(p-\alpha)^2+\dfrac{2b}{a}\,p+\beta^2 = (p+\alpha)^2+\beta^2$, то можно записать

$$\frac{(p-\alpha)^2+\beta^2}{(p-\alpha)^2+\dfrac{2b}{a}\,p+\beta^2} = 1-\frac{2b}{a}\frac{p}{(p+\alpha)^2+\beta^2}.$$

Из уравнения (3.14) следует, что $\nu(0)=f(0)$. Поэтому равенство (3.15) можно представить в следующем виде:

$$\bar{\nu}(p) = \bar{f}(p) - \frac{2b}{a\beta}\,\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}\,[p\bar{f}(p)-f(0)], \tag{3.16}$$

и, переходя от (3.16) к оригиналам, получим

$$\nu(t) = f(t) - \frac{2b}{a}\int\limits_0^t f'(\tau)K_1(t-\tau)\,d\tau \qquad (3.17)$$

для $0 \leqslant t \leqslant \ell/a$. Здесь функция f определена в (3.11), а ядро K_1 имеет вид (3.13).

2. *Случай действительных различных корней.* Предположим, что корни p_1 и p_2 уравнения $p^2 - \dfrac{b}{a}p + (ak)^2 = 0$ действительны и различны. Обозначим

$$p_1 = \alpha + \beta, \quad p_2 = \alpha - \beta, \quad \alpha = \frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{b^2 - (2a^2k)^2}}{2a}.$$

Тогда решения y_1 и y_2 уравнения (2.5), удовлетворяющие условиям (2.6), можно представить в виде

$$y_1(t) = e^{\alpha t}\left[\operatorname{ch}\beta t - \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{sh}\beta t\right], \qquad y_2(t) = e^{\alpha t}\frac{\operatorname{sh}\beta t}{\beta}, \qquad (3.18)$$

а ядро $K(t,s)$ из формул (2.7) принимает вид

$$K(t,s) = e^{\alpha(t-s)}\,\frac{\operatorname{sh}\beta(t-s)}{\beta}. \qquad (3.19)$$

Поэтому

$$K_1(t-s) = e^{\alpha(t-s)}\,\frac{\operatorname{sh}\beta(t-s)}{\beta}. \qquad (3.20)$$

Выпишем уравнение (3.10) для рассматриваемого случая при $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\ell}{a}$:

$$\nu(t) + \frac{2b}{a\beta}\int\limits_0^t e^{\alpha(t-s)}\operatorname{sh}\beta(t-s)\,\nu'(s)\,ds = f(t). \qquad (3.21)$$

Уравнение (3.21) решаем с помощью операционного исчисления.

Изложенным выше способом получаем уравнение в изображениях:

$$\left[1+\frac{2b}{a}\frac{p}{(p-\alpha)^2-\beta^2}\right]\bar\nu(p) = \frac{2b}{a}\frac{\nu(0)}{(p-\alpha)^2-\beta^2} + \bar f(p). \qquad (3.22)$$

Поскольку $\nu(0) = f(0)$ и

$$\frac{(p-\alpha)^2-\beta^2}{(p-\alpha)^2+\dfrac{2b}{a}p-\beta^2} = 1-\frac{2b}{a}\frac{p}{(p+\alpha)^2-\beta^2},$$

то равенство (3.22) можно представить в виде

$$\bar{\nu}(p) = \bar{f}(p) - \frac{2b}{a\beta}\frac{\beta}{(p+\alpha)^2-\beta^2}[p\bar{f}(p)-f(0)],$$

и, переходя к оригиналам, получаем

$$\nu(t) = f(t) - \frac{2b}{a}\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\frac{\operatorname{sh}\beta(t-\tau)}{\beta}f'(\tau)\,d\tau.$$

Если воспользоваться (3.20), то окончательно получаем представление функции ν в виде (3.17), где f имеет вид (3.11), а ядро $K_1(t)$ определено в (3.20).

3. *Случай кратного корня.* Предположим, что характеристическое уравнение $p^2 - \dfrac{b}{a}p + (ak)^2 = 0$ имеет один действительный корень $\alpha = \dfrac{b}{2a}$, т. е. выполнено равенство $b^2-(2a^2k)^2 = 0$. Тогда решения $y_1(t)$ и $y_2(t)$ уравнения (2.5), удовлетворяющие условиям (2.6), можно представить в виде $y_1(t) = e^{\alpha t}[1-\alpha t]$, $y_2(t) = e^{\alpha t}t$, а ядро $K(t,s)$ из формул (2.7) имеет вид $K(t,s) = e^{\alpha(t-s)}\,(t-s)$, поэтому

$$K_1(t-s) = e^{\alpha(t-s)}(t-s). \tag{3.23}$$

Выпишем уравнение (3.10) для рассматриваемого случая

$$\nu(t)+\frac{2b}{a}\int\limits_0^t e^{\alpha(t-s)}\,(t-s)\,\nu'(s)\,ds = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\ell}{a}. \tag{3.24}$$

Уравнение (3.24) решаем с помощью операционного исчисления.

Отметим, что из этого уравнения следует $\nu(0) = f(0)$. Изложенным выше способом получаем уравнение в изображениях:

$$\frac{(p-\alpha)^2 + \dfrac{2b}{a}p}{(p-\alpha)^2}\,\bar{\nu}(p) = \bar{f}(p) + \frac{2b}{a}\frac{f(0)}{(p-\alpha)^2}.$$

Поскольку в рассматриваемом случае $2b/a = 4\alpha$, то

$$\frac{(p-\alpha)^2}{(p-\alpha)^2 + \dfrac{2b}{a}\,p} = 1 - \frac{2b}{a}\frac{p}{(p+\alpha)^2}.$$

Поэтому

$$\bar{\nu}(p) = \bar{f}(p) - \frac{2b}{a}\left[\frac{p\bar{f}(p)}{(p+\alpha)^2} - \frac{f(0)}{(p+\alpha)^2}\right]. \tag{3.25}$$

Переходя от (3.25) к оригиналам, воспользуемся выражением (3.23). В итоге находим

$$\nu(t) = f(t) - \frac{2b}{a}\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}(t-\tau)f'(\tau)\,d\tau,$$

которое можно переписать в виде (3.17), где функция f определяется по формуле (3.11), в которой ядро K_1 имеет вид (3.23).

Таким образом, структура решения уравнения (3.10) в этом случае остается такой же, как и при решении того же уравнения в двух предыдущих случаях. Особенность представления функции ν на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \ell/a$ проявляется лишь в зависимости вида ядра K_1 от того, каковы корни уравнения $p^2 - \dfrac{b}{a}\,p + (ak)^2 = 0$.

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть функции φ и ψ начального состояния в краевой задаче* (1.8)–(1.12) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.2. *Тогда управление ν, определяющее решение $u = u(x,t)$ этой краевой задачи, которое удовлетворяет условиям* (1.13), *имеет вид* (3.17) *при* $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\ell}{a}$

и (3.7) *при* $\dfrac{\ell}{a} \leqslant t \leqslant \dfrac{2\ell}{a}$. *При этом ядро* K_1 *определяется по формулам*:

1) (3.13) *при* $b^2 - (2a^2k)^2 < 0$;
2) (3.20) *при* $b^2 - (2a^2k)^2 > 0$;
3) (3.23) *при* $b^2 - (2a^2k)^2 = 0$.

Функция f *определяется в* (3.11).

3.3. Анализ решения задачи для системы с непосредственным граничным воздействием. В теореме 2.2 сформулированы достаточные условия, при выполнении которых управление ν определяет дважды непрерывно дифференцируемое решение $u = u(t, x)$ краевой задачи (1.8)–(1.12). В доказанной теореме 3.2 не проверено, что полученное управление ν, во-первых, является дважды непрерывно дифференцируемой функцией на $[0, T]$, а во-вторых, что оно удовлетворяет условиям (2.12) краевой задачи (1.8)–(1.12). Для этого прежде всего следует проверить выполнимость условий согласования функции ν, заданной выражением (3.17), в точке $t = 0$ и условий (2.12), а также выполнения соответствующих равенств в точке $t = \ell/a$.

Теорема 3.3. *Пусть* $\varphi \in C^2[0, \ell]$, $\psi \in C^1[0, \ell]$, *а также выполнены следующие условия:*

1) $a^2\varphi''(\ell) - b\varphi'(\ell) + (a\mu)^2\varphi(\ell) = 0$;
2) $f(0) = \varphi(0)$, $f'(0) = \psi(0)$, $f''(0) = a^2\varphi''(0) + \dfrac{2b}{a}\,\psi(0)$;
3) $f\left(\dfrac{\ell}{a}\right) - \dfrac{2b}{a^2}\displaystyle\int\limits_0^{\ell} K_1\left(\dfrac{\ell - s}{a}\right) f'\left(\dfrac{s}{a}\right) ds = E(\ell) - C$;
4) $f'\left(\dfrac{\ell}{a}\right) - \dfrac{2b}{a^2}\displaystyle\int\limits_0^{\ell} K_1'\left(\dfrac{\ell - s}{a}\right) f'\left(\dfrac{s}{a}\right) ds = aE'(\ell)$,

где функция f *имеет вид* (3.11).

Тогда управление ν, *определяемое формулами* (3.17) *и* (3.7), *дважды непрерывно дифференцируемо и соответствующее ему решение краевой задачи* (1.8)–(1.12) *удовлетворяет условиям* (1.13) *при* $T = 2l/a$.

4. Решение задачи наблюдаемости для систем с распределенными и сосредоточенными параметрами

Для решения задачи наблюдаемости воспользуемся результатами теоремы 2.2 при $\nu \equiv 0$. Сформулируем теорему, при этом будем использовать обозначения § 3 этой главы.

Теорема 4.1. *Задача граничного наблюдения решается при минимальном периоде наблюдения $T = 2\ell/a$. При этом функции начального состояния системы φ и ψ восстанавливаются с помощью функции наблюдения* (1.17) $z_1 \in C^1[0,T]$ *следующим образом:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \left[z_1\Big(\frac{\tau}{a}\Big) + z_2\Big(\frac{\ell-\tau}{a}\Big)\right] d\tau, \tag{4.1}$$

$$\psi(x) = \frac{a}{2}\left[z_1\Big(\frac{x}{a}\Big) - z_2\Big(\frac{\ell-x}{a}\Big)\right], \tag{4.2}$$

где

$$z_2(t) = f(t) + \frac{2b}{a}\int_0^t K_1(\tau-t) f'(\tau)\, d\tau \tag{4.3}$$

и

$$f(t) = \left[z_1\Big(\frac{\ell+at}{a}\Big) - \frac{2b}{a} K_1(t)\, z_1\Big(\frac{\ell}{a}\Big)\right] - \\ - \left[Y'(\ell+at) - \frac{2b}{a} K_1(t)\, Y'(\ell)\right]. \tag{4.4}$$

Замечание 4.1. Заметим, что вид функции K_1 зависит от знака выражения $b^2 - (2a^2k)^2$ (см. формулировку теоремы 3.2).

Доказательство. Будем искать начальные функции φ и ψ, используя вид (2.2) решения $u = u(t,x)$ краевой задачи и результат наблюдения (1.17) за колебаниями системы. Получаем следующее уравнение:

$$E'(at) = z_1(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\ell/a. \tag{4.5}$$

Здесь воспользовались видом (2.13) функции G для отрицательных аргументов и $\nu \equiv 0$.

Из выражений (2.3) для функции E уравнение (4.5) имеет вид

$$\varphi'(at) + \frac{\psi(at)}{a} = z_1(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \ell/a. \tag{4.6}$$

Для $\ell/a \leqslant t \leqslant 2\ell/a$ получаем из (2.14) следующее уравнение:

$$Y'(at) + G'\left(\ell - a\Big(t - \frac{\ell}{a}\Big)\right) + \\ + \frac{2b}{a} \int\limits_0^{t-\ell/a} K_1'\Big(t - \frac{\ell}{a} - \zeta\Big) G'(\ell - a\zeta)\, d\zeta = z_1(t).$$

В найденном уравнении сделаем замену $t - \ell/a = \tau$, тогда справедливо $0 \leqslant \tau \leqslant \ell/a$, а интеграл возьмем по частям и обозначим

$$g(\tau) = G'(l - a\tau), \tag{4.7}$$

получаем уравнение

$$Y'(\ell + a\tau) + g(\tau) + \frac{2b}{a} K_1(\tau)\, g(0) + \\ + \frac{2b}{a} \int\limits_0^{\tau} K_1(\tau - \zeta)\, g'(\zeta)\, d\zeta = z_1\Big(\frac{\ell + a\tau}{a}\Big), \tag{4.8}$$

здесь воспользовались тем, что $K_1(0) = 0$. Из уравнения (4.8) находим

$$g(0) = z_1(\ell/a) - Y'(\ell). \tag{4.9}$$

Для того чтобы найти функцию g, надо решить уравнение

$$g(t) + \frac{2b}{a} \int\limits_0^{t} K_1(t - \zeta)\, g'(\zeta)\, d\zeta = f(t), \tag{4.10}$$

при $0 \leqslant t \leqslant \ell/a$, где

$$f(t) = z_1\Big(\frac{\ell + at}{a}\Big) - Y'(\ell + at) - \frac{2b}{a} K_1(t)\, g(0), \tag{4.11}$$

а с учетом (4.9) получаем выражение (4.4) для функции $f(t)$.

Уравнение (4.10) будем решать с помощью операционного исчисления. Для этого предположим, что переменная t принимает все неотрицательные значения. Тогда, если

$$\bar{g}(p) = \int\limits_0^\infty e^{-p\,t} g(t)\,dt, \quad \bar{K}_1(p) = \int\limits_0^\infty e^{-p\,t} K_1(t)\,dt,$$

$$\bar{f}(p) = \int\limits_0^\infty e^{-p\,t} f(t)\,dt,$$

то с помощью теоремы свертки получаем следующее равенство:

$$\bar{g}(p) = \frac{2b}{a}\,\frac{g(0)}{1+\dfrac{2b}{a}\,p\,\bar{K}_1(p)}\,\bar{K}_1(p) + \frac{1}{1+\dfrac{2b}{a}\,p\,\bar{K}_1(p)}\,\bar{f}(p).$$

Отсюда следует, что

$$g(t) = \frac{2b}{a}\,g(0)\,R_1(t) + \int\limits_0^t R_2(t-s)\,f(s)\,ds, \quad t \geqslant 0,$$

где функции $R_1(t)$ и $R_2(t)$ определяются следующими соотношениями:

$$\int\limits_0^\infty e^{-p\,t} R_1(t)\,dt = \frac{\bar{K}_1(p)}{1+\dfrac{2b}{a}\,p\,\bar{K}_1(p)},$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-p\,t} R_2(t)\,dt = \frac{1}{1+\dfrac{2b}{a}\,p\,\bar{K}_1(p)}.$$

Структура функции g существенно зависит от типа корней характеристического уравнения $p^2 - \dfrac{b}{a}\,p + (ak)^2 p = 0$. Рассмотрим возможные варианты.

1. *Случай комплексных корней.* Уравнение (4.10) записываем в виде, используя явный вид (3.13) функции K_1,

$$g(t) + \frac{2b}{a}\int\limits_0^t e^{\alpha(t-s)}\,\frac{\sin\beta(t-s)}{\beta}\,g'(s)\,ds = f(t), \quad t \geqslant 0. \quad (4.12)$$

Так как $\bar{K}_1(p) = \int\limits_0^\infty e^{-p\,t}\, e^{\alpha t}\, \dfrac{\sin \beta t}{\beta}\, dt = \dfrac{1}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$, то уравнение в изображениях, соответствующее (4.12), можно представить в виде

$$\left[1+\frac{2b}{a}\frac{p}{(p-\alpha)^2+\beta^2}\right]\bar{g}(p) = \bar{f}(p) + \frac{2b\,g(0)}{a}\frac{1}{(p-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\bar{g}(p) = \frac{(p-\alpha)^2+\beta^2}{(p-\alpha)^2+\dfrac{2b}{a}\,p+\beta^2}\bar{f}(p) + \frac{2bg(0)}{a}\frac{1}{(p-\alpha)^2+\dfrac{2b}{a}\,p+\beta^2}. \qquad (4.13)$$

Так как $(p-\alpha)^2 + \dfrac{2b}{a}\,p + \beta^2 = (p+\alpha)^2+\beta^2$, то можно записать

$$\frac{(p-\alpha)^2+\beta^2}{(p-\alpha)^2+\dfrac{2b}{a}\,p+\beta^2} = 1 - \frac{2b}{a}\frac{p}{(p+\alpha)^2+\beta^2}.$$

Непосредственно из (4.12) следует, что $g(0) = f(0)$. Поэтому равенство можно представить в следующем виде:

$$\bar{g}(p) = \bar{f}(p) - \frac{2b}{a\beta}\,\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}\,[p\bar{f}(p) - f(0)]$$

и, переходя от (4.13) к оригиналам, получим для $0 \leqslant t \leqslant \ell/a$

$$g(t) = f(t) - \frac{2b}{a}\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\,\frac{\sin\beta(t-\tau)}{\beta}\,f\,'(\tau)\,d\tau.$$

Если, наконец, воспользоваться обозначением (3.13), то эту формулу можно представить в виде

$$g(t) = f(t) - \frac{2b}{a}\int\limits_0^t K_1(t-\tau)\,f\,'(\tau)\,d\tau, \qquad (4.14)$$

при $0 \leqslant t \leqslant \ell/a$ функция f определяется формулой (4.11).

2. *Случай различных действительных корней.* Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получаем, что решение уравнения (4.10) имеет вид (4.14). При этом функция K_1 имеет вид (3.20).

3. *Случай кратного корня.* Решение уравнения (4.10) имеет вид (4.14), где функция K_1 — (3.23).

Используем (4.7) и полученное выражение (4.14) для функции g, получаем

$$\varphi'(\ell - at) - \frac{\psi(\ell - at)}{a} = z_2(t), \tag{4.15}$$

где $z_2(t)$ определено в (4.3).

В уравнении (4.6) сделаем замену $x = at$, а в уравнении (4.15) — замену $\ell - at = x$, приходим к следующей системе относительно неизвестных функций φ и ψ:

$$\varphi'(x) + \frac{\psi(x)}{a} = z_1\left(\frac{x}{a}\right), \tag{4.16}$$

$$\varphi'(x) - \frac{\psi(x)}{a} = z_2\left(\frac{\ell - x}{a}\right) \tag{4.17}$$

Сложим уравнения (4.16) и (4.17) и вычтем из уравнения (4.16) уравнение (4.17), получаем выражение (4.2) для неизвестной функции ψ, а для функции φ находим

$$\varphi(x) = C + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \left[z_1\left(\frac{\tau}{a}\right) + z_2\left(\frac{l - \tau}{a}\right)\right] d\tau. \tag{4.18}$$

Используем условия (2.11) для функции φ в выражении (4.18), найдем константу C, она равняется нулю. Окончательно для функции φ получаем выражение (4.1).

5. Задача наблюдаемости для систем с граничными условиями третьего рода

Рассмотрим систему, колебания которой описываются волновым уравнением (1.1), начальными условиями (1.2) и однородными граничными условиями третьего рода для $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_x(t,\, 0) - \beta_1 u(t,\, 0) &= z_1(t), \\ \alpha_2 u_x(t,\, \ell) + \beta_2 u(t,\, \ell) &= z_2(t), \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\ddot{z}_1(t) + \lambda_1^2 z_1(t) = b_1 u_x(t,\,0),\ \ z_1(0) = z_1^0,\ \ \dot{z}_1(0) = z_1^1, \quad (5.2)$$

$$\ddot{z}_2(t) + \lambda_2^2 z_2(t) = b_2 u_x(t,\,\ell),\ \ z_2(0) = z_2^0,\ \ \dot{z}_2(0) = z_2^1. \quad (5.3)$$

Если из условий (5.1)–(5.3) исключить функции z_1 и z_2, то их можно представить в виде[1]:

$$\begin{gathered} u_{xxx}(t,0) - \frac{\beta_1}{\alpha_1} u_{xx}(t,0) + \Lambda_1 u_x(t,0) - \frac{\lambda_1^2 \beta_1}{a^2 \alpha_1} u(t,0) = 0, \\ \alpha_1 u_x(0,0) - \beta_1 u(0,0) = z_1^0,\ \ \alpha_1 u_{xt}(0,0) - \beta_1 u_t(0,0) = z_1^1, \end{gathered} \quad (5.4)$$

$$\begin{gathered} u_{xxx}(t,\ell) + \frac{\beta_2}{\alpha_2} u_{xx}(t,\ell) + \Lambda_2 u_x(t,\ell) + \frac{\lambda_2^2 \beta_2}{a^2 \alpha_2} u(t,\ell) = 0, \\ \alpha_2 u_x(0,\ell) + \beta_2 u(0,\ell) = z_2^0,\ \ \alpha_2 u_{xt}(0,\ell) + \beta_2 u_t(0,\ell) = z_2^1, \end{gathered} \quad (5.5)$$

где $\Lambda_i = \dfrac{\lambda_i^2 \alpha_i - b_i}{a^2 \alpha_i}$, $i = 1, 2$.

Задача наблюдаемости. *Найти период времени T и начальное состояние* (1.2) *объекта, колебания которого описываются уравнением* (1.1) *и однородными краевыми условиями* (5.1)–(5.3)*, по результатам граничного наблюдения*:

$$u(t,\,0) = w_1(t), \quad u(t,\,\ell) = w_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (5.6)$$

5.1. Вспомогательные результаты. Приведем утверждение, дающие решение рассматриваемой краевой задачи. Для его формулировки введем операторы $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$, которые следующим образом действуют на функцию y:

$$\mathscr{M}_1 y(t) = \dddot{y}(t) + \frac{a\beta_1}{\alpha_1}\,\ddot{y}(t) + a^2 \Lambda_1\,\dot{y}(t) + \frac{a\lambda_1^2 \beta_1}{\alpha_1}\,y(t), \quad (5.7)$$

$$\mathscr{M}_2 y(t) = \dddot{y}(t) + \frac{a\beta_2}{\alpha_2}\,\ddot{y}(t) + a^2 \Lambda_2\,\dot{y}(t) + \frac{a\lambda_2^2 \beta_2}{\alpha_2}\,y(t). \quad (5.8)$$

Пусть $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $y_i^3(t)$ — линейно независимые решения уравнений

$$\mathscr{M}_i\, y(t) = 0, \qquad i = 1, 2, \quad (5.9)$$

[1] При условии существования производных соответствующего порядка у функции $u = u(t,\,x)$.

с дифференциальными операторами вида (5.7) и (5.8), которые удовлетворяют следующим условиям $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} &y_i^1(0) = 1, \quad \dot{y}_i^1(0) = 0, \quad \ddot{y}{}_i^1(0) = 0,\\ &y_i^2(0) = 0, \quad \dot{y}_i^2(0) = 1, \quad \ddot{y}{}_i^2(0) = 0,\\ &y_i^3(0) = 0, \quad \dot{y}_i^3(0) = 0, \quad \ddot{y}{}_i^3(0) = 1. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Определим функции:

$$Y_1(s) = 2\varphi(0)\, y_1^1\left(\frac{s}{a}\right) + 2\psi(0)\, y_1^2\left(\frac{s}{a}\right) + 2a^2\varphi''(0)\, y_1^3\left(\frac{s}{a}\right), \tag{5.11}$$

$$Y_2(s) = 2\varphi(\ell)\, y_2^1\left(\frac{s-\ell}{a}\right) + 2\psi(\ell)\, y_2^2\left(\frac{s-\ell}{a}\right) + {} \\ + 2a^2\varphi''(\ell)\, y_2^3\left(\frac{s-\ell}{a}\right), \tag{5.12}$$

$$K_i(\zeta, s) = \frac{W_i(\zeta, s)}{W_i(s)}, \qquad i = 1, 2,$$

где

$$W_i(\zeta,s) = \begin{vmatrix} y_i^1(s) & y_i^2(s) & y_i^3(s)\\ \dot{y}_i^1(s) & \dot{y}_i^2(s) & \dot{y}_i^3(s)\\ y_i^1(\zeta) & y_i^2(\zeta) & y_i^3(\zeta) \end{vmatrix}, W_i(s) = \begin{vmatrix} y_i^1(s) & y_i^2(s) & y_i^3(s)\\ \dot{y}_i^1(s) & \dot{y}_i^2(s) & \dot{y}_i^3(s)\\ \ddot{y}{}_i^1(s) & \ddot{y}{}_i^2(s) & \ddot{y}{}_i^3(s) \end{vmatrix}.$$

Заметим, что введенные функции $K_i(\zeta, s)$, $i = 1, 2$, обладают следующими свойствами:

$$K_i(\zeta, \zeta) = 0, \qquad \frac{d}{d\zeta}\, K_i(\zeta, s)\Big|_{s=\zeta} = 0, \qquad \frac{d^2}{d\zeta^2}\, K_i(\zeta, s)\Big|_{s=\zeta} = 1.$$

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия*:

$$\varphi(x) \in C^3[0,\, \ell], \quad \psi(x) \in C^2[0,\, \ell], \tag{5.13}$$

$$\alpha_1\varphi'(0) - \beta_1\varphi(0) = z_1^0, \quad \alpha_1\psi'(0) - \beta_1\psi(0) = z_1^1, \tag{5.14}$$

$$\alpha_2\varphi'(\ell) + \beta_2\varphi(\ell) = z_2^0, \quad \alpha_2\psi'(\ell) + \beta_2\psi(\ell) = z_2^1, \tag{5.15}$$

$$\varphi'''(0) - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\,\varphi''(0) + \Lambda_1\varphi'(0) - \frac{\lambda_1^2\beta_1}{a^2\alpha_1}\,\varphi(0) = 0, \tag{5.16}$$

$$\varphi'''(\ell) + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\,\varphi''(\ell) + \Lambda_2\varphi'(\ell) + \frac{\lambda_2^2\beta_2}{a^2\alpha_2}\,\varphi(\ell) = 0. \tag{5.17}$$

Тогда существует единственное решение[2] $u = u(t, x)$, *принадлежащее пространству* $C^3(\overline{Q_T})$ *краевой задачи* (1.1), (1.2), (5.4), (5.5), *которое при* $0 \leqslant t \leqslant \ell/a$ *представимо в следующем виде:*

$$u(t, x) = \frac{1}{2}\,[E(x+at) + G(x-at)], \tag{5.18}$$

где

$$G(\zeta) = \begin{cases} \varphi(\zeta) - \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_0^{\zeta} \psi(s)\,ds, \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant \ell, \\ Y_1(-\zeta) - E(-\zeta) + \displaystyle\int\limits_0^{-\zeta/a} K_1\Big(-\frac{\zeta}{a}, s\Big) F_1(s) ds, \\ \qquad\qquad -\ell \leqslant \zeta \leqslant 0, \end{cases} \tag{5.19}$$

здесь

$$F_1(s) = 2a^3 E'''(as) + 2a^3 \Lambda_1 E'(as), \tag{5.20}$$

$$E(\zeta) = \begin{cases} \varphi(\zeta) + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_0^{\zeta} \psi(s)\,ds, \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant \ell, \\ Y_2(\zeta) - G(2\ell - \zeta) + \displaystyle\int\limits_0^{(\zeta-\ell)/a} K_2\Big(\frac{\zeta-\ell}{a}, s\Big) F_2(s) ds, \\ \qquad\qquad \ell \leqslant \zeta \leqslant 2\ell, \end{cases} \tag{5.21}$$

здесь

$$F_2(s) = -2a^3 G'''(\ell - as) - 2a^3 \Lambda_2 G'(\ell - as). \tag{5.22}$$

Аналогичная теорема доказана в **[74]** при граничных условиях:

$$u_{xxx}(t, 0) - \frac{\beta_1}{\alpha_1} u_{xx}(t, 0) + \Lambda_1 u_x(t, 0) - \frac{\lambda_1^2 \beta_1}{a^2 \alpha_1} u(t, 0) = \nu_1(t),$$
$$u_{xxx}(t, \ell) + \frac{\beta_2}{\alpha_2} u_{xx}(t, \ell) + \Lambda_2 u_x(t, \ell) + \frac{\lambda_2^2 \beta_2}{a^2 \alpha_2} u(t, \ell) = \nu_2(t),$$

[2] Здесь $Q_T = \{\,(x, t)\colon\ 0 < x < \ell,\ 0 < t < T\,\}$.

полагая в этом доказательстве $\nu_1(t) = \nu_2(t) \equiv 0$, получим доказательство теоремы 5.1.

5.2. Решение задачи граничной наблюдаемости. Будем искать начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, используя вид (5.18) решения краевой задачи $u = u(t, x)$ и результат наблюдения (5.6) за колебаниями системы. Получаем следующие уравнения:

$$E(at) + G(-at) = 2w_1(t), \tag{5.23}$$

$$E(\ell + at) + G(\ell - at) = 2w_2(t) \tag{5.24}$$

при $0 \leqslant t \leqslant \ell/a$. В уравнение (5.23) подставим второе выражение из (5.19) для $G(-at)$ и в уравнение (5.24) подставим второе выражение из (5.21) для $E(\ell + at)$. В результате находим:

$$Y_1(at) + \int\limits_0^t K_1(t,s)F_1(s)\,ds = 2w_1(t), \tag{5.25}$$

$$Y_2(\ell + at) + \int\limits_0^t K_2(t,s)F_2(s)\,ds = 2w_2(t). \tag{5.26}$$

Поскольку функции Y_1 и Y_2 вида (5.11) и (5.12) соответственно удовлетворяют уравнениям (5.9), а

$$\mathscr{M}_i\left[\int\limits_0^t K_i(t,s)F_i(s)\,ds\right] = F_i(t), \qquad i = 1, 2,$$

то, применяя операторы $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ к уравнениям (5.25) и (5.26), получаем следующие равенства:

$$F_i(t) = 2\mathscr{M}_i\left[w_i(t)\right], \qquad i = 1, 2. \tag{5.27}$$

Подставим в уравнения (5.27) значения функций F_1 и F_2 из формул (5.20) и (5.22) соответственно, затем воспользуемся тем, что функции E и G определяются по формулам (5.19) и (5.21) при $0 \leqslant x \leqslant \ell$. В итоге получаем:

$$\varphi'''(at) + \frac{\psi''(at)}{a} + \Lambda_1\left[\varphi'(at) + \frac{\psi(at)}{a}\right] = \frac{1}{a^3}\,\mathscr{M}_1[w_1(t)],$$

$$\varphi'''(\ell-at)+\frac{\psi''(\ell-at)}{a}+\Lambda_2\left[\varphi'(\ell-at)+\frac{\psi(\ell-at)}{a}\right]=$$
$$=-\frac{1}{a^3}\,\mathscr{M}_2[w_2(t)].$$

Теперь в этих соотношениях положим $x=at$ и $x=\ell-at$, окончательно находим следующие уравнения:

$$J_1''(x)+\Lambda_1 J_1(x)=g_1(x), \tag{5.28}$$

$$J_2''(x)+\Lambda_2 J_2(x)=g_2(x). \tag{5.29}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} J_1(x)&=\varphi'(x)+\frac{\psi(x)}{a},\ g_1(x)=\frac{1}{a^3}\,\mathscr{M}_1\,[w_1(t)]\Big|_{t=\frac{x}{a}};\\ J_2(x)&=\varphi'(x)-\frac{\psi(x)}{a},\ g_2(x)=-\frac{1}{a^3}\,\mathscr{M}_2\,[w_2(t)]\Big|_{t=\frac{\ell-x}{a}}. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Замечание 5.1. Очевидно, что при $T<\ell/a$ невозможно восстановить начальные данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, поскольку для уравнений (5.28) переменная x принадлежит сегменту $[0,\,aT]$ и для уравнения (5.29) переменная x принадлежит сегменту $[\ell-aT,\,\ell]$. Поэтому восстановить функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ для любого x из всего сегмента $[0,\,\ell]$ невозможно, если $aT<\ell$.

Поскольку функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ неизвестны, то в уравнениях (5.28) и (5.29) $J_i(x)$ можно рассматривать как неизвестные, подлежащие определению функции переменной x. Для того чтобы выписать решения этих уравнений, введем следующие функции: пусть $u_i^1=u_i^1(x)$ и $u_i^2=u_i^2(x)$ — линейно независимые решения однородных уравнений:

$$J_i''(x)+\Lambda_i J_i(x)=0,\qquad i=1,2, \tag{5.31}$$

обладающие свойствами для $i=1,2$,

$$u_i^1(0)=1,\ (u_i^1)'(0)=0,\ u_i^2(0)=0,\ (u_i^2)'(0)=1, \tag{5.32}$$

и

$$k_i(x,s)=\frac{\begin{vmatrix} u_i^1(s) & u_i^2(s)\\ u_i^1(x) & u_i^2(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_i^1(s) & u_i^2(s)\\ (u_i^1)'(s) & (u_i^2)'(s)\end{vmatrix}},\qquad i=1,2. \tag{5.33}$$

Очевидно, что введенные функции (5.33) обладают свойствами

$$k_i(x,x)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\,k_i(x,s)\Big|_{s=x}=1,\qquad i=1,2.$$

Теперь можно выписать решения уравнений (5.28), (5.29) в следующем виде:

$$J_1(x)=C_1^1u_1^1+C_1^2u_1^2+G_1(x), \tag{5.34}$$

$$J_2(x)=C_2^1u_2^1+C_2^2u_2^2+G_2(x), \tag{5.35}$$

где

$$G_i(x)=\int\limits_0^x k_i(x,s)g_i(s)\,ds,\qquad i=1,2. \tag{5.36}$$

Из выражений (5.30), (5.34), (5.35) находим функции ψ и φ:

$$2\varphi(x)=\int\limits_0^x\Big\{C_1^1u_1^1(\tau)+C_1^2u_1^2(\tau)+C_2^1u_2^1(\tau)+C_2^2u_2^2(\tau)\Big\}\,d\tau+\\+\int\limits_0^x\Big\{G_1(\tau)+G_2(\tau)\Big\}\,d\tau+C, \tag{5.37}$$

$$\frac{2}{a}\,\psi(x)=\big[C_1^1u_1^1(x)+C_1^2u_1^2(x)\big]-\\-\big[C_2^1u_2^1(x)+C_2^2u_2^2(x)\big]+[G_1(x)-G_2(x)]. \tag{5.38}$$

Для этих функций справедливы равенства (5.16), (5.17) и следующие равенства согласования начальных функций (1.2) и функций наблюдения (5.6) в угловых точках $(0,0)$ и $(0,l)$ прямоугольника Q_T:

$$\varphi(0)=w_1(0),\ \varphi(\ell)=w_2(0),\ \psi(0)=\dot w_1(0),\ \psi(\ell)=\dot w_2(0). \tag{5.39}$$

Таким образом, находим $C=2w_1(0)$, а чтобы найти константы C_i^j, $i,j=1,2$, необходимо найти решение переопределенной системы уравнений (5.16), (5.17) и (5.39), которую представим, используя свойства (5.32) функций

u_i^j для $i, j = 1, 2$ в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&H_1 = C_1^1 - C_2^1,\ H_2 = C_1^1 A_{11} + C_1^2 A_{12} - C_2^1 A_{21} - C_2^2 A_{22},\\
&H_3 = C_1^1 B_{11} + C_1^2 B_{12} + C_2^1 B_{21} + C_2^2 B_{22},\\
&\alpha_1 H_4 = -C_1^2 \beta_1 + C_2^1 \alpha_1 \Lambda - C_2^2 \beta_1,\\
&\alpha_2 H_5 = C_1^1(\beta_2 D_{11} - \alpha_2 \Lambda A_{11}) + C_1^2(\beta_2 D_{12} - \alpha_2 \Lambda A_{12}) +\\
&\qquad\qquad + C_2^1 \beta_2 D_{21} + C_2^2 \beta_2 D_{22},
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

где введены обозначения для $i, j = 1, 2$:

$$
\begin{aligned}
&A_{ij} = u_i^j(l), \qquad B_{ij} = \int_0^\ell u_i^j(\tau)\,d\tau,\\
&D_{ij} = (u_i^j)'(\ell), \qquad \Lambda = \Lambda_2 - \Lambda_1,\\
&H_1 = \frac{2}{a}\,\dot{w}_1(0), \quad H_2 = \frac{2}{a}\,\dot{w}_2(0) - [G_1(\ell) - G_2(\ell)],\\
&H_3 = 2\,[w_2(0) - w_1(0)] - \int_0^\ell [G_1(\tau) + G_2(\tau)]\,d\tau,\\
&H_4 = 2\,\frac{\lambda_1^2}{a^2}\,\frac{\beta_1}{\alpha_1}\,w_1(0) - [g_1(0) + g_2(0)],\\
&H_5 = -2\,\frac{\lambda_2^2}{a^2}\,\frac{\beta_2}{\alpha_2}\,w_2(0) - [g_1(\ell) + g_2(\ell)] -\\
&\qquad\qquad - \Lambda G_1(\ell) - [G_1'(\ell) + G_2'(\ell)].
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

Система (5.40) имеет единственное решение, если функции w_1 и w_2 удовлетворяют дополнительному условию, которое имеет следующий вид:

$$
H_1\gamma_1 + H_2\gamma_2 + H_3\gamma_3 + H_4\gamma_4 + H_5\gamma_5 = 0,
\tag{5.42}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1 = \alpha_1\alpha_2\Lambda^2 A_{22}(A_{11}B_{12} - A_{12}B_{11}) +\\
&\qquad + \beta_1\beta_2\big[(A_{11}B_{21} + A_{21}B_{11})(D_{12} - D_{22}) +\\
&+ (A_{11}D_{21} + A_{21}D_{11})(B_{22} - B_{12}) + (B_{11}D_{21} - B_{21}D_{11})(A_{12} + A_{22})\big] +
\end{aligned}
$$

$$+\alpha_1\beta_2\Lambda\big[D_{22}(A_{12}B_{11}-A_{11}B_{12})-D_{11}(A_{22}B_{12}+A_{12}B_{22})+$$
$$+D_{12}(A_{11}B_{22}+A_{22}B_{11})\big]+\alpha_2\beta_1\Lambda\big[A_{21}(A_{11}B_{12}-A_{12}B_{11})+$$
$$+A_{11}(A_{22}B_{21}-A_{21}B_{22})\big],$$

$$\gamma_2=\alpha_1\alpha_2\Lambda^2A_{12}B_{22}+\beta_1\beta_2\big[(B_{11}+B_{12})(D_{22}-D_{12})+$$
$$+(B_{12}-B_{22})(D_{21}+D_{11})\big]+\alpha_1\beta_2\Lambda\big[D_{22}B_{12}-D_{12}B_{22}\big]+$$
$$+\alpha_2\beta_1\Lambda\big[A_{11}(B_{22}-B_{12})+A_{12}(B_{11}+B_{21})\big],$$

$$\gamma_3=\alpha_1\alpha_2\Lambda^2A_{12}A_{22}-\alpha_1\beta_2\Lambda(A_{22}D_{12}+A_{12}D_{22})+$$
$$+\beta_1\beta_2\big[(D_{22}-D_{12})(A_{21}-A_{11})-(D_{21}+D_{11})(A_{12}+A_{22})\big],$$

$$\gamma_4=\alpha_1\beta_2\big[(D_{22}B_{12}-D_{12}B_{22})(A_{21}-A_{11})+$$
$$(A_{22}D_{12}+A_{12}D_{22})(B_{11}+B_{21})-(A_{22}B_{12}+A_{12}B_{22})(D_{21}+D_{11})\big]$$
$$+\alpha_1\alpha_2\Lambda\big[A_{22}(A_{11}B_{12}-A_{12}B_{11})+A_{12}(A_{21}B_{22}-A_{22}B_{21})\big],$$

$$\gamma_5=\alpha_2\beta_1\big[(A_{11}-A_{21})(B_{22}-B_{12})+(A_{12}+A_{22})(B_{21}+B_{11})\big]+$$
$$+\alpha_1\alpha_2\Lambda\big[A_{22}B_{12}+A_{12}B_{22}\big].$$

Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 5.2. *Если либо $\Lambda_1\neq\Lambda_2$, либо $\beta_1\neq 0$, либо $\beta_2\neq 0$, то задача граничного наблюдения решается для минимального периода наблюдения $T=\ell/a$. При этом функции начального состояния системы φ и ψ из* (5.13) *восстанавливаются с помощью функций наблюдения* (5.6) *из $C^3[0, T]$, удовлетворяющих условию* (5.42)*, с помощью формул* (5.37) *и* (5.38) *соответственно. При этом константы C_i^j, $i,j=1,2$, являются решением системы линейных уравнений* (5.40)*, а константа C равна $2w_1(0)$.*

Условие (5.42) довольно громоздко, поэтому приведем это условие для таких значений Λ_i, $i=1,2$, для которых оно имеет более компактный вид.

1) $\mathbf{\Lambda_1=\Lambda_2=0}$, $\boldsymbol{\beta_i\neq 0}$, $\boldsymbol{i=1,2}$. В этом случае из (5.31)—(5.33) следует:

$$u_i^1(x)\equiv 1,\ u_i^2(x)=x,\ k_i(x,s)=x-s,\quad i=1,2. \tag{5.43}$$

При этом система (5.40) превращается в следующую систему для нахождения констант C_i^j, $i,j=1,2$:

$$
\begin{aligned}
H_1 &= C_1^1 - C_2^1,\\
H_2 &= C_1^1A_{11} + C_1^2A_{12} - C_2^1A_{21} - C_2^2A_{22},\\
H_3 &= C_1^1B_{11} + C_1^2B_{12} + C_2^1B_{21} + C_2^2B_{22},\\
\alpha_1H_4 &= -C_1^2\beta_1 - C_2^2\beta_1,\\
\alpha_2H_5 &= C_1^1\beta_2D_{11} + C_1^2\beta_2D_{12} + C_2^1\beta_2D_{21} + C_2^2\beta_2D_{22}.
\end{aligned}
\tag{5.44}
$$

Дополнительное условие на функции $w_i(t)$, $i=1,2$, с учетом обозначений (5.41), имеет вид

$$\alpha_1\beta_2H_4 + \alpha_2\beta_1H_5 = 0. \tag{5.45}$$

Решение задачи граничного наблюдения в этом частном случае дает следующая теорема.

Теорема 5.3. *Если* $\Lambda_1=\Lambda_2=0$, *а* $\beta_1\neq 0$ *или* $\beta_2\neq 0$, *либо* $\beta_i\neq 0$ *для* $i=1,2$, *то задача граничного наблюдения решается при минимальном периоде наблюдения* $T=\ell/a$. *При этом функции начального состояния системы* φ *и* ψ *из* (5.13) *восстанавливаются с помощью функций наблюдения* (5.6) *из* $C^3[0,T]$, *удовлетворяющих условию* (5.45), *с помощью формул* (5.37) *и* (5.38) *соответственно. При этом константы* C_i^j, $i,j=1,2$, *являются решением системы линейных уравнений* (5.44), *а константа* C *равна* $2w_1(0)$.

2) $\boldsymbol{\Lambda_1=\Lambda_2=k^2,\ \beta_i\neq 0,\ i=1,2.}$ Для этого случая

$$u_i^1=\cos kx,\ u_i^2=\frac{\sin kx}{k},\ k_i(x,s)=\frac{\sin k(x-s)}{k}. \tag{5.46}$$

Дополнительное условие на функции w_i, $i=1,2$, имеет вид

$$\beta_1\beta_2k^2H_3 + \alpha_1\beta_2H_4 + \alpha_2\beta_1H_5 = 0. \tag{5.47}$$

3) $\boldsymbol{\Lambda_1=\Lambda_2=-k^2,\ \beta_i\neq 0,\ i=1,2.}$ В этом случае

$$u_i^1(x)=\operatorname{ch} kx,\quad u_i^2(x)=\frac{\operatorname{sh} kx}{k},\quad k_i(x,s)=\frac{\operatorname{sh} k(x-s)}{k}.$$

Функции w_i, $i = 1, 2$, с учетом обозначений (5.41), должны удовлетворять следующему условию:

$$\beta_1\beta_2 k^2 H_3 - \alpha_1\beta_2 H_4 - \alpha_2\beta_1 H_5 = 0. \tag{5.48}$$

Решения задач граничного наблюдения в случаях **2)** и **3)** формулируются аналогично теореме 5.3. При этом на функции наблюдения w_i, $i = 1, 2$, накладываются дополнительные условия (5.47) и (5.48) соответственно.

Замечание 5.2. Задача граничного наблюдения не имеет решения, если $\beta_1 = \beta_2 = 0$ и $\Lambda_1 = \Lambda_2$, в этом случае четвертое и пятое уравнения системы (5.40) превращаются в следующие условия на функции w_1 и w_2: $H_4 = H_5 = 0$, и для нахождения четырех неизвестных констант C_i^j для $i, j = 1, 2$ остаются три уравнения. Таким образом, невозможно восстановить функции φ и ψ.

Приведем примеры восстановления начальных данных (1.2) по функциям наблюдений (5.6).

Пример 5.1. Для выбранных коэффициентов $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 1$, $b_1 = 4$, $b_2 = 2$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $a = 1$, $\ell = 1$ выполняются равенства $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$. Колебания системы описываются следующей краевой задачей:

$$\begin{gathered}
u_{tt}(t, x) = u_{xx}(t,x), \qquad (t, x) \in Q_T, \\
u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\
u_{xxx}(t, 0) - u_{xx}(t, 0) - u(t, 0) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\
u_x(0, 0) - u(0, 0) = z_1^0, \quad u_{xt}(0, 0) - u_t(0, 0) = z_1^1, \\
2u_{xxx}(t, 1) + u_{xx}(t, 1) + u(t, 1) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \\
2u_x(0, 1) + u(0, 1) = z_2^0, \quad 2u_{xt}(0, 1) + u_t(0, 1) = z_2^1.
\end{gathered}$$

Здесь функции φ и ψ неизвестны и их требуется найти по результатам наблюдения. Предположим, что в течение времени $T = 1$ наблюдаем по границам $x = 0$ и $x = 1$ за колебаниями системы и получаем следующие функции наблюдения (5.6):

$$w_1(t) = -\frac{1\,809}{2}\,\exp\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{7}\,t}{2}\right) - \\ - \frac{3\,099\sqrt{7}}{14}\,\exp\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{7}\,t}{2}\right) + \\ + \frac{399}{2}\,\exp(-2\,t) + 84\,t^5 - 210\,t^4 - 240\,t^3 - 690\,t^2 + 1\,626\,t + 705,$$

$$w_2(t) = -298\,572\,\cos\left(\frac{\sqrt{7}\,t}{4}\right)\exp\left(\frac{t}{4}\right) - \\ - \frac{181\,572\sqrt{7}}{7}\,\sin\left(\frac{\sqrt{7}\,t}{4}\right)\exp\left(\frac{t}{4}\right) + \\ + 32\,652\,\exp(-t) + 265\,920 + 152\,688\,t - 60\,960\,t^2 - \\ - 12\,000\,t^3 - 1\,680\,t^4 + 672\,t^5.$$

Находим дифференциальные операторы $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ для заданных параметров, эти операторы действуют на функцию $y(t)$ следующим образом:

$$\mathscr{M}_1 y(t) = \dddot{y}(t) + \ddot{y}(t) + 2y(t),$$
$$\mathscr{M}_2 y(t) = \dddot{y}(t) + \frac{1}{2}\,\ddot{y}(t) + \frac{1}{2}\,y(t).$$

Функции $u_i^j = u_i^j(x)$ и $k_i = k_i(x,s)$, $i,j = 1,2$, для полученных постоянных $\Lambda_i = 0$, $i = 1,2$, указаны в (5.43). Для функций наблюдения w_i, $i = 1,2$, находим функции g_i и G_i, $i = 1,2$, которые определены в (5.30) и (5.36) соответственно,

$$g_1(x) = g_2(x) = 24\,x - 240\,x^2 + 720\,x^3 - 840\,x^4 + 336\,x^5,$$

$$G_1(x) = G_2(x) = -48\,x^7 + (336\,x + 840)\,\frac{x^6}{6} - \\ -(840\,x + 720)\,\frac{x^5}{5} + (720\,x + 240)\,\frac{x^4}{4} + (-240\,x - 24)\,\frac{x^3}{3} + 12\,x^3.$$

Все константы H_i для $i = 1, \ldots, 5$, определенные в (5.41), равны нулю, поэтому полученные функции наблюдения w_i, $i = 1, 2$, удовлетворяют условию (5.45) и система (5.44) имеет лишь нулевое решение $C_i^j = 0$, $i, j = 1, 2$, и $C = 2w_1(0) = 0$. Таким образом, из (5.37) и (5.38) находим функции φ и ψ соответственно:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^x [G_1(\tau) + G_2(\tau)]\,d\tau, \quad \psi(x) = \frac{1}{2}\,[G_1(x) - G_2(x)].$$

Учитывая вид функций G_i, $i = 1, 2$, получаем

$$\varphi(x) = x^4(1-x)^4, \qquad \psi(x) = 0.$$

Пример 5.2. Для констант $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 20$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \sqrt{19}$, $\ell = 1$, $a = 1$ выполняется $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 9$. Краевая задача, описывающая колебания системы, имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}
u_{tt}(t,\,x) = a^2 u_{xx}(t,\,x), \qquad (t,\,x) \in Q_T,\\
u(0,\,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,\,x) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,\\
u_{xxx}(t,\,0) - u_{xx}(t,\,0) + 9u_x(t,\,0) - 9u(t,\,0) = 0,\\
u_x(0,\,0) - u(0,\,0) = z_1^0, \quad u_{xt}(0,\,0) - u_t(0,\,0) = z_1^1,\\
2u_{xxx}(t,\,1) + u_{xx}(t,\,1) + 18u_x(t,\,1) + 19u(t,\,1) = 0,\\
2u_x(0,\,1) + u(0,\,1) = z_2^0, \quad 2u_{xt}(0,\,1) + u_t(0,\,1) = z_2^1.
\end{gathered}$$

Здесь функции φ и ψ неизвестны, но, наблюдая в течение периода $T = 1$ на границах $x = 0$ и $x = 1$ за колебаниями системы, имеем следующие функции наблюдения (5.6):

$$w_1(t) = \frac{6\,566}{15}\,\sin(3t) - \frac{6\,566}{5}\,\cos(3t) + \frac{8\,442}{5}\,\exp(-t) - \frac{1\,876}{5}\,\exp(-6t),$$

$$w_2(t) = -\frac{12\,998}{11}\,\exp(-6-t) + \frac{167\,902}{187}\,\cos\left(\frac{\sqrt{151}\,t}{4}\right)\exp\left(-6+\frac{t}{4}\right) -$$

$$-\frac{922\,054\sqrt{151}}{28\,237}\sin\left(\frac{\sqrt{151}\,t}{4}\right)\exp\left(-6+\frac{t}{4}\right)+ \\ +\frac{4\,824}{17}\exp(-6+6t).$$

Дифференциальные операторы $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ для выбранных параметров имеют следующий вид:

$$\mathscr{M}_1 y(t) = \dddot{y}(t) + \ddot{y}(t) + 9\dot{y}(t) + 9y(t),$$
$$\mathscr{M}_2 y(y) = \dddot{y}(t) + \frac{1}{2}\,\ddot{y}(t) + 9\dot{y}(t) + \frac{19}{2}\,y(t).$$

Функции $u_i^j = u_i^j(x)$ и $k_i = k_i(x,s)$, $i,j = 1,2$ для $\Lambda_i = 9$, $i = 1,2$, определены в (5.46).

Для полученных функций наблюдения $w_i(t)$, $i = 1,2$, найдем функции g_i и G_i, $i = 1,2$, которые определены в (5.30) и (5.36) соответственно:

$$g_1(x) = -g_2(x) = 84\,420\exp(-6x),$$
$$G_1(x) = -G_2(x) = -1\,876\cos(3x) + 3\,752\sin(3x) + \\ +1\,876\exp(-6x).$$

Константы H_i из (5.41) равны:

$$H_1 = 3752,\ H_2 = 3\,752\cos(3) - 7\,504\sin(3),\ H_3 = H_4 = H_5 = 0,$$

поэтому функции w_i, $i=1,2$, удовлетворяют условию (5.47). Система (5.40) имеет решение: $C_2^2 = -C_1^2 = 11256$, $C_2^1 = -C_1^1 = -1876$ и, кроме того, $C = 2w_1(0) = 0$. Подставляя полученные константы и найденные функции g_i и G_i, $i = 1,2$, в (5.37) и (5.38) находим соответственно функции φ и ψ:

$$\varphi(x) = 0, \qquad \psi(x) = 1876\exp(-6x).$$

5.3. Решение краевых задач при граничных условиях разных родов. Придавая разные значения коэффициентам α_i и β_i, $i = 1,\ 2$, в условиях (5.1)–(5.3), получим краевые условия первого рода, второго рода или граничные условия смешанных типов.

1. Краевые условия первого рода. В краевых условиях (5.1) положим $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и $-\beta_1 = \beta_2 = 1$. Тогда

на границах $x = 0$ и $x = \ell$ прямоугольника Q_T получаем краевые условия первого рода:

$$u(t,\,0) = z_1(t), \quad u(t,\,\ell) = z_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5.49}$$

Если из условий (5.49), (5.1)–(5.3) исключить функции z_1 и z_2, то найдем следующие краевые условия:

$$\begin{gathered} u_{tt}(t,0) - b_1 u_x(t,0) + \lambda_1^2 u(t,0) = 0, \\ u(0,0) = z_1^0, \qquad u_t(0,0) = z_1^1, \end{gathered} \tag{5.50}$$

$$\begin{gathered} u_{tt}(t,l) - b_2 u_x(t,l) + \lambda_2^2 u(t,l) = 0, \\ u(0,l) = z_2^0, \qquad u_t(0,l) = z_2^1. \end{gathered} \tag{5.51}$$

Дифференциальные операторы $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ действуют на функцию y следующим образом:

$$\mathscr{M}_1 y(t) = \ddot{y}(t) + \frac{b_1}{a}\dot{y}(t) + \lambda_1^2 y(t), \tag{5.52}$$

$$\mathscr{M}_2 y(t) = \ddot{y}(t) - \frac{b_2}{a}\dot{y}(t) + \lambda_2^2 y(t). \tag{5.53}$$

Функции $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i = 1, 2,$ — фундаментальные решения уравнений (5.9), для которых вронскиан W_i в точке нуль равен единице, т. е.

$$y_i^1(0) = 1,\ y_i^2(0) = 0,\ \dot{y}_i^1(0) = 0,\ \dot{y}_i^2(0) = 1. \tag{5.54}$$

Определим функции $Y_1(\zeta)$ и $Y_2(\zeta)$:

$$Y_1(\zeta) = 2\varphi(0)\,y_1^1\left(\frac{\zeta}{a}\right) + 2\psi(0)\,y_1^2\left(\frac{\zeta}{a}\right), \tag{5.55}$$

$$Y_2(\zeta) = 2\varphi(\ell)\,y_2^1\left(\frac{\zeta-\ell}{a}\right) + 2\psi(\ell)\,y_2^2\left(\frac{\zeta-\ell}{a}\right). \tag{5.56}$$

Следующий результат является следствием теоремы 5.1.

Следствие 5.1. *Пусть выполнены условия*:

$$\varphi(x) \in C^2[0,\,\ell], \quad \psi(x) \in C^1[0,\,\ell], \tag{5.57}$$

$$\varphi(0) = z_1^0, \quad \psi(0) = z_1^1, \tag{5.58}$$

$$\varphi(\ell) = z_2^0, \quad \psi(\ell) = z_2^1. \tag{5.59}$$

$$a^2\varphi''(0) - b_1\varphi'(0) + \lambda_1^2\varphi(0) = 0, \tag{5.60}$$

$$a^2\varphi''(\ell) - b_2\varphi'(\ell) + \lambda_2^2\varphi(\ell) = 0. \tag{5.61}$$

Тогда единственное решение $u = u(t, x) \in C^2(\overline{Q_T})$ *краевой задачи* (1.1), (1.2), (5.50), (5.51) *представимо в виде* (5.18) *при* $0 \leqslant t \leqslant \ell/a$, *где* G *имеет вид* (5.19) *для*

$$F_1(s) = 2b_1 E'(as) \tag{5.62}$$

и E *имеет вид* (5.21) *для*

$$F_2(s) = 2b_2 G'(\ell - as). \tag{5.63}$$

2. Краевые условия второго рода. Если в условиях (5.1) положить $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ и $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то получаем вторую краевую задачу:

$$u_x(t,\,0) = z_1(t), \quad u_x(t,\,\ell) = z_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5.64}$$

Исключая из условий (5.64), (5.1)–(5.3) функции z_1 и z_2, находим краевые условия:

$$\begin{gathered} u_{xtt}(t,\,0) + (\lambda_1^2 - b_1)\,u_x(t,\,0) = 0, \\ u_x(0,\,0) = z_1^0, \quad u_{xt}(0,\,0) = z_1^1, \end{gathered} \tag{5.65}$$

$$\begin{gathered} u_{xtt}(t,\,\ell) + (\lambda_2^2 - b_2)\,u_x(t,\,\ell) = 0, \\ u_x(0,\,\ell) = z_2^0, \quad u_{xt}(0,\,\ell) = z_2^1. \end{gathered} \tag{5.66}$$

В этом случае для функций φ, ψ должны выполняться условия согласования:

$$\varphi'(0) = z_1^0, \quad \psi'(0) = z_1^1, \tag{5.67}$$

$$\varphi'(\ell) = z_2^0, \quad \psi'(\ell) = z_2^1, \tag{5.68}$$

$$a^2\varphi'''(0) + (\lambda_1^2 - b_1)\varphi'(0) = 0, \tag{5.69}$$

$$a^2\varphi'''(\ell) + (\lambda_2^2 - b_2)\varphi'(\ell) = 0. \tag{5.70}$$

Дифференциальные операторы $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ определяются следующим образом:

$$\mathscr{M}_1 y(t) = \dddot{y}(t) + (\lambda_1^2 - b_1)\,\dot{y}(t), \tag{5.71}$$

$$\mathscr{M}_2 y(t) = \dddot{y}(t) + (\lambda_2^2 - b_2)\,\dot{y}(t). \tag{5.72}$$

Для этих операторов функции Y_1 и Y_2 имеют вид (5.11) и (5.12) соответственно. Решение второй краевой задачи дает следующее утверждение.

Следствие 5.2. *Пусть для функций φ и ψ, определяющих начальное состояние системы, выполнены условия* (5.13), (5.67)–(5.70). *Тогда единственное решение u из $C^3(\overline{Q_T})$ краевой задачи* (1.1), (1.2), (5.65), (5.66) *представимо в виде* (5.18) *при $0 \leqslant t \leqslant \ell/a$, где G имеет вид* (5.19) *для*

$$F_1(s) = 2a^3E'''(as) + 2a(\lambda_1^2 - b_1)E'(as)$$

и E имеет вид (5.21) *для*

$$F_2(s) = -2a^3G'''(\ell - as) - 2a(\lambda_2^2 - b_2)G'(\ell - as).$$

3. Смешанные граничные условия. Если в краевых условиях (5.1) положить $\alpha_1 = 0$ и $-\beta_1 = 1$, то на границе $x = 0$ прямоугольника Q_T будет задано краевое условие первого рода, а на границе $x = \ell$ — по-прежнему условие третьего рода:

$$u(t,\,0) = z_1(t), \quad \alpha_2 u_x(t,\,\ell) + \beta_2 u(t,\,\ell) = z_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5.73}$$

При $\alpha_2 = 0$ и $\beta_2 = 1$ в краевых условиях (5.1) на границе $x = \ell$ прямоугольника Q_T будет краевое условие первого рода, а на границе $x = 0$ — краевое условие третьего рода:

$$\alpha_1 u_x(t,\,0) - \beta_1 u(t,\,0) = z_1(t), \qquad u(t,\,\ell) = z_2(t). \tag{5.74}$$

Такие краевые задачи будем назвать краевой задачей (1;3) и краевой задачей (3;1) соответственно.

Если из условий (5.73), (5.1)–(5.3) исключить функции z_1 и z_2, то получаем краевые условия (5.50) и (5.5). Аналогично, исключая из (5.74), (5.1)–(5.3) функции z_1 и z_2, получим краевые условия (5.4) и (5.51).

Для краевой задачи (1,3) в качестве оператора $\mathscr{M}_1$ возьмем оператор (5.52), а в качестве оператора $\mathscr{M}_2$ — оператор (5.8).

Функции $y_1^i = y_1^i(t)$, $i = 1, 2$ — фундаментальные решения уравнения $\mathscr{M}_1 y(t) = 0$ — обладают свойствами (5.54), а функции $y_2^i = y_2^i(t)$, $i = 1, 2, 3,$ — фундаментальные решения уравнения $\mathscr{M}_2 y(t) = 0$ — обладают свойством (5.10). Функции Y_1 и Y_2 имеют вид (5.55) и (5.12) соответственно.

Следствие 5.3. *Предположим, что выполнены условия* (5.13), (5.15), (5.17), (5.58) *и* (5.60). *Тогда единственное решение $u = u(t, x) \in C^3(\overline{Q_T})$ краевой задачи* (1.1), (1.2), (5.5), (5.50) *при* $0 \leqslant t \leqslant \ell/a$ *представимо в виде* (5.18)*, где* G *имеет вид* (5.19) *для* F_1 *вида* (5.62) *и* E *имеет вид* (5.21) *для* F_2 *вида* (5.22).

Для краевой задачи (3,1) в качестве оператора $\mathscr{M}_1$ возьмем оператор (5.7), а в качестве оператора $\mathscr{M}_2$ — оператор (5.53).

Функции $y_1^i = y_1^i(t)$, $i = 1, 2, 3$ — фундаментальные решения дифференциального уравнения $\mathscr{M}_1 y(t) = 0$ — обладают свойствами (5.10), а функции $y_2^i = y_2^i(t)$, $i = 1, 2,$ — фундаментальные решения уравнения $\mathscr{M}_2 y(t) = 0$ — обладают свойством (5.54). Функции Y_1 и Y_2 имеют вид (3.19) и (5.56) соответственно.

Следствие 5.4. *Предположим, что выполнены условия* (5.13), (5.14), (5.16), (5.59) *и* (5.61)*. Тогда единственное решение* $u = u(t,x) \in C^3(\overline{Q_T})$ *краевой задачи* (1.1), (1.2), (5.5), (5.51) *представимо в виде* (5.18) *при* $0 \leqslant t \leqslant \ell/a$*, где* G *имеет вид* (5.19) *для* F_1 *вида* (5.20) *и* E *имеет вид* (5.21) *для* F_2 *вида* (5.63).

Задача (1;3) превращается в задачу (1;2), если в условии (5.73) выполняется $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$:

$$u(t,\,0) = z_1(t), \quad u_x(t,\,\ell) = z_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Если в условиях (5.74) имеет место $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, то задача (3;1) превращается в задачу (2;1):

$$u_x(t,\,0) = z_1(t), \quad u(t,\,\ell) = z_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Для того чтобы получить решения задач (1;2) и (2;1), надо в следствии 5.3 положить $\alpha_2 = 1$ и $\beta_2 = 0$, а в следствии 5.4 определить $\alpha_1 = 1$ и $\beta_1 = 0$ соответственно. Эти коэффициенты используются при определении дифференциальных операторов $\mathscr{M}_2$ и $\mathscr{M}_1$ и функций F_1 и F_2.

При $\alpha_1 = 1$ и $\beta_1 = 0$ из условий (5.3) получаем краевую задачу (2;3):

$$u_x(t,0) = z_1(t), \quad \alpha_2 u_x(t,l) + \beta_2 u(t,l) = z_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

если $\alpha_2 = 1$ и $\beta_2 = 0$, то из условий (5.3) получаем краевую задачу (3;2):

$$\alpha_1 u_x(t,0) - \beta_1 u(t,0) = z_1(t), \quad u_x(t,l) = z_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Решения полученных краевых задач дает теорема 5.1, в формулировке этой теоремы используются операторы $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$, функции F_1 и F_2, при определении которых для краевых задач (2;3) и (3;2) надо учитывать специальный вид коэффициентов α_i, β_i, $i = 1, 2$.

5.4. Решение задач наблюдения при граничных условиях разных родов. Приведем результаты по наблюдаемости упругих колебаний для граничных условий смешанных типов.

1. Краевые условия первого рода. Решая задачу наблюдения по функциям (5.6), также приходим к уравнениям (5.27). Для функций F_1 и F_2 вида (5.62) и (5.63) соответственно получаем следующую систему уравнений для $0 \leqslant x \leqslant \ell$:

$$\varphi'(x) + \frac{\psi(x)}{a} = h_1(x), \tag{5.75}$$

$$\varphi'(x) - \frac{\psi(x)}{a} = h_2(x), \tag{5.76}$$

где

$$h_1(x) = \frac{1}{b_1}\mathscr{M}_1[w_1(t)]\Big|_{t=\frac{x}{a}}, \quad h_2(x) = \frac{1}{b_2}\mathscr{M}_2[w_2(t)]\Big|_{t=\frac{\ell-x}{a}}, \tag{5.77}$$

а операторы $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ имеют вид (5.52) и (5.53) соответственно.

Из системы (5.75)–(5.76) находим функции φ и ψ:

$$\varphi(x) = w_1(0) + \frac{1}{2}\int\limits_0^x [h_1(\tau) + h_2(\tau)]\,d\tau, \tag{5.78}$$

$$\psi(x) = \frac{a}{2}\,[h_1(x) - h_2(x)], \tag{5.79}$$

в выражении (5.78) использовали $w_1(0) = u(0,0) = \varphi(0)$.

Согласование начальных условий (1.2) и функций наблюдения (5.6) при $x = 0$, $x = \ell$ и $t = 0$ дают следующие условия на функции w_1 и w_2:

$$[w_2(0) - w_1(0)] = \frac{1}{2}\int\limits_0^l [h_1(\tau) + h_2(\tau)]\, d\tau, \tag{5.80}$$

$$\dot{w}_1(0) = \frac{a}{2}\,[h_1(0) - h_2(0)], \tag{5.81}$$

$$\dot{w}_2(0) = \frac{a}{2}\,[h_1(l) - h_2(l)], \tag{5.82}$$

здесь функции h_1 и h_2 имеют вид (5.77). Из условий (5.60) и (5.61) получаем следующие условия на функции w_1 и w_2:

$$a^2[h_1'(0) + h_2'(0)] - b_1[h_1(0) + h_2(0)] + 2\lambda_1^2 w_1(0) = 0, \tag{5.83}$$

$$a^2[h_1'(\ell) + h_2'(\ell)] - b_2[h_1(\ell) + h_2(\ell)] + 2\lambda_2^2 w_2(0) = 0. \tag{5.84}$$

Замечание 5.3. Условиям (5.80)–(5.84) удовлетворяют, например, функции $w_i(t) \in C^3[0,T]$, $i = 1,2$, обладающие следующими свойствами для $i = 1,2$, $n = 1,2,3$:

$$w_i(0) = w_i(\ell/a) = 0,\ w_i^{(n)}(0) = w_i^{(n)}(\ell/a) = 0, \tag{5.85}$$

$$\int\limits_0^{\ell/a} [w_1(t) + w_2(t)]\, dt = 0.$$

Решение задачи наблюдения для краевых условий первого рода дает теорема.

Теорема 5.4. *Задача граничного наблюдения для краевых условий первого рода* (5.49) *решается при минимальном периоде наблюдения $T = \ell/a$. При этом функции начального состояния системы φ и ψ из* (5.57) *восстанавливаются с помощью функций наблюдения* (5.6) *w_i класса $C^3[0,T]$, $i = 1,2$, удовлетворяющих условиям* (5.80)–(5.84), *с помощью формул* (5.78) *и* (5.79) *соответственно.*

Замечание 5.4. Функции φ и ψ, принадлежащие классам $C^2[0,\ \ell]$ и $C^1[0,\ \ell]$ соответственно, восстанавливаются с помощью функций наблюдения w_1, $i = 1,2$, принадлежащих классу $C^3[0,\ T]$, т. е. для восстановления начальных данных от функций наблюдения требуется более высокая гладкость, чем гладкость у восстанавливаемых функций.

2. Краевые условия второго рода. В случае краевых условий второго рода функции φ и ψ находятся с помощью формул (5.37) и (5.38), при этом дифференциальные операторы $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ имеют вид (5.71) и (5.72) соответственно. Таким образом, решение задачи наблюдения сводится к нахождению корней системы (5.40) при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, которая, как уже отмечалось в замечании 5.2, имеет бесконечно много решений при $\Lambda_1 = \Lambda_2$, т.е. восстановление начальных данных невозможно.

Условие на функции w_1 и w_2, при котором система (5.40) обладает единственным решением, имеет следующий вид для $\Lambda = \Lambda_2 - \Lambda_1 \neq 0$:

$$H_1\Lambda\left[A_{11}A_{22}B_{12} - A_{12}A_{22}B_{11}\right] + H_2\Lambda A_{12}B_{22} + H_3\Lambda A_{12}A_{22} + H_4\left[A_{11}A_{22}B_{12} + A_{12}A_{21}B_{22} - A_{12}A_{22}B_{11} - A_{12}A_{22}B_{21}\right] + {} + H_5\left[A_{12}B_{22} + A_{22}B_{12}\right] = 0. \quad (5.86)$$

Замечание 5.5. Условие (5.86) выполняется, если, например, все H_i, $i = \overline{1,5}$, равны нулю. Это выполняется, если функции w_i удовлетворяют условиям (5.85) и

$$G_i(\ell) = G_i'(\ell) = 0, \quad i = 1,2, \qquad \int\limits_0^\ell \left[G_1(\tau) + G_2(\tau)\right] d\tau = 0.$$

Следующая теорема дает решение задачи наблюдения при краевых условиях второго рода.

Теорема 5.5. *Если* $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, *то задача граничного наблюдения для краевых условий второго рода* (5.64) *решается с минимальным периодом наблюдения* $T = \ell/a$. *При этом функции начального состояния системы* φ *и* ψ *из* (5.13) *восстанавливаются с помощью функций наблюдения* (5.6) $w_i(t) \in C^3[0,T]$, $i = 1,2$, *удовлетворяющих условию* (5.86), *с помощью формул* (5.37) *и* (5.38) *соответственно. При этом константы* C_i^j, $i,j = 1,2$, *являются решением системы линейных уравнений* (5.40), *а константа* C *равна* $2w_1(0)$.

3. Смешанные граничные условия. Приведем решение задачи граничного наблюдения для краевой задачи (1;3), т. е. для краевых условий (5.73). В этом случае получаем для нахождения функций φ и ψ систему уравнений (5.75) и (5.35), здесь оператор $\mathscr{M}_1$ имеет вид (5.52), а оператор $\mathscr{M}_2$ имеет вид (5.8). Таким образом,

$$\varphi(x) = C + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \left[C_2^1 u_2^1(\tau) + C_2^2 u_2^2(\tau)\right] d\tau + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \left[G_2(\tau) + h_1(\tau)\right] d\tau, \quad (5.87)$$

$$\psi(x) = \frac{a}{2}\left[h_1(x) - G_2(x) - C_2^1 u_2^1(x) - C_2^2 u_2^2(x)\right], \quad (5.88)$$

функция G_2 определена в (5.36), функция h_1 — в (5.77), а функции $u_2^i = u_2^i(x)$, $i = 1, 2,$ — фундаментальные решения уравнения (5.31) со свойствами (5.32). Константы C, C_2^i, $i = 1, 2$, найдем из следующих условий:

$$\varphi(0) = w_1(0), \quad \psi(0) = \dot{w}_1(0), \quad \psi(\ell) = \dot{w}_2(0).$$

Следовательно,

$$C = w_1(0), \quad C_2^1 = h_1(0) - \frac{2}{a}\,\dot{w}_1(0),$$
$$C_2^2 = \frac{1}{A_{22}}\big\{h_1(\ell) - h_1(0)A_{21} - G_2(\ell) + \\ + \frac{2}{a}\left[\dot{w}_1(0)A_{21} - \dot{w}_2(0)\right]\big\}, \quad (5.89)$$

здесь использованы обозначения из (5.41).

Найденная функция φ должна удовлетворять условиям $\varphi(\ell) = w_2(0)$, (5.60) и (5.17), поэтому функции наблюдения w_1 и w_2 удовлетворяют следующим дополнительным условиям:

$$
\begin{gathered}
2[w_2(0) - w_1(0)] = \\
= C_2^1 B_{21} + C_2^2 B_{22} + \int\limits_0^\ell [G_2(\tau) + h_1(\tau)]\, d\tau, \\
a^2 \left[C_2^2 + h_1'(0)\right] - b_1 \left[C_2^1 + h_1(0)\right] + 2\lambda_1^2 w_1(0) = 0, \qquad (5.90) \\
\frac{\beta_2}{\alpha_2} \left[C_2^1 D_{21} + C_2^2 D_{22}\right] + h_1''(\ell) + \frac{\beta_2}{\alpha_2} h_1'(\ell) + \Lambda_2 h_1(\ell) + \\
+\ g_2(\ell) + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\, G_2'(\ell) + \frac{2\lambda_2^2 \beta_2}{a^2 \alpha_2}\, w_2(0) = 0,
\end{gathered}
$$

здесь использованы обозначения (5.41) и константы (5.89).

Решение задачи граничного наблюдения для краевых условий (5.73) дает следующая теорема.

Теорема 5.6. *Задача граничного наблюдения для краевых условий* (5.73) *решается с минимальным периодом наблюдения* $T = \ell/a$. *При этом функции начального состояния системы* φ *и* ψ *из* (5.13) *восстанавливаются с помощью функций наблюдения* (5.6) $w_1(t)$ *из* $C^4[0, T]$ *и* $w_2(t)$ *из* $C^3[0, T]$, *удовлетворяющих условиям* (5.90), *с помощью формул* (5.87) *и* (5.88) *соответственно. При этом константы* C *и* C_2^i, $i = 1, 2$, *определяются в* (5.89).

Замечание 5.6. Условия (5.90) выполняются, если для функций w_1 и w_2 справедливо следующее:

$$
\begin{gathered}
w_1(0) = w_1(\ell/a) = 0, \quad w_1^{(n)}(0) = w_1^{(n)}(\ell/a) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \\
w_1^{(4)}(\ell/a) = 0, \quad \int\limits_0^{\ell/a} w_1(\tau)\, d\tau = 0, \\
w_2(0) = 0, \quad w_2^{(n)}(0) = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \\
G_2(\ell) = G_2'(\ell) = 0, \quad \int\limits_0^\ell G_2(\tau)\, d\tau = 0.
\end{gathered}
$$

6. Управляемость колебаниями сети с распределенными и сосредоточенными параметрами

Будем рассматривать колебания многозвенного объекта — сети, составленной из m струн, длина каждой струны равна ℓ. Все объекты связаны в одной точке, к которой присоединен объект с сосредоточенными параметрами, другие концы струн жестко закреплены. Такую сеть будем называть *сетью с граничным воздействием через объект с сосредоточенными параметрами*.

6.1. Постановка задач. Колебания сети с граничным воздействием через объект с сосредоточенными параметрами описываются волновыми уравнениями:

$$u^i_{tt}(x,t) = a_i^2 u^i_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in Q, \quad i = 1,\ldots,m, \quad (6.1)$$

Функции $u^i(x,t)$, $i = 1,\ldots,m$, удовлетворяют начальным условиям:

$$u^i(x,0) = \varphi_i(x), \quad u^i_t(x,0) = \psi_i(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell, \quad (6.2)$$

и граничным условиям при $t \geqslant 0$:

$$u^i(\ell,t) = 0, \qquad i = 1,\ldots,m, \quad (6.3)$$

$$u^1(0,t) = u^2(0,t) = \ldots = u^m(0,t), \quad (6.4)$$

$$\sum_{i=1}^m k_i u^i_x(0,t) = y(t), \quad (6.5)$$

$$\ddot{y}(t)+c^2 y(t)=\mu(t)+\sum_{i=1}^m b_i u^i(0,t), \;\; y(0)=y^0, \;\; \dot{y}(0)=y^1. \quad (6.6)$$

Из условия (6.6) следует, что

$$y(t)=y^0\cos ct + \frac{y^1}{c}\,\sin ct + \frac{1}{c}\int\limits_0^t \sin c(t-\tau)\big[\mu(\tau) + \beta u^1(0,\tau)\big]\,d\tau. \quad (6.7)$$

Здесь учтено условие (6.4), согласно которому

$$\sum_{k=1}^{m} b_i u^i(0,t) = \sum_{k=1}^{m} b_i u^1(0,t) = \beta u^1(0,t), \qquad \beta = \sum_{k=1}^{m} b_i.$$

Согласование начальных и граничных условий дают следующие равенства для функций φ_i и ψ_i, $i = 1, \ldots, m$:

$$\begin{gathered} \varphi_i(\ell) = 0, \quad \psi_i(\ell) = 0 \qquad i = 1, \ldots, m, \\ \varphi_1(0) = \ldots = \varphi_m(0), \quad \psi_1(0) = \ldots = \psi_m(0), \\ \sum_{i=1}^{m} k_i \varphi_i'(0) = y^0, \quad \sum_{i=1}^{m} k_i \psi_i'(0) = y^1. \end{gathered} \tag{6.8}$$

Сформулируем задачу гашения колебаний сети с граничным воздействием через объект с сосредоточенными параметрами.

Задача управляемости. *Найти момент времени T и функцию μ такие, что решения $u^i = u^i(x,t)$ краевой задачи* (6.1)–(6.6) *с начальными значениями* (6.2) *в момент времени T принимают нулевые значения*:

$$u^i(x,T) = 0, \quad u_t^i(x,T) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell, \tag{6.9}$$

для $i = 1, \ldots, m$.

6.2. Решение краевой задачи. Решения u^i краевой задачи будем искать в виде

$$u^i(x,t) = E_i(x + a_i t) + G_i(x - a_i t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}. \tag{6.10}$$

Начальные условия (6.2) для функций u^i вида (6.10) дают равенства

$$E_i(x) + G_i(x) = \varphi_i(x), \; a_i[E_i'(x) - G_i'(x)] = \psi_i(x), \; i = 1, \ldots, m,$$

и окончательно получаем

$$E_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{2} + \frac{\widehat{\psi}_i(x)}{2a_i} \; G_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{2} - \frac{\widehat{\psi}_i(x)}{2a_i}, \tag{6.11}$$

$i = 1, \ldots, m$, при $0 \leqslant x \leqslant \ell$. Здесь $\widehat{w}_i(x) = \int\limits_0^x \psi_i(s)\, ds$.

Из краевых условий (6.3) приходим к следующим равенствам:

$$E_i(\ell + z) = -G_i(\ell - z), \qquad z \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{6.12}$$

Граничные условия (6.4) и выражения (6.7) позволяют определить значения функции $G_i(-z)$ при $z \geqslant 0$. Поскольку из (6.10) следует, что

$$u^i(0,t) = E_i(a_i t) + G_i(-a_i t), \qquad u^i_x(0,t) = E'_i(a_i t) + G'_i(-a_i t).$$

Тогда соотношение (6.5) можно представить, используя выражение (6.7), в виде

$$F_1(t) = \sum_{i=1}^{m} k_i[E'_i(a_i t) + G'_i(-a_i t)] - \\ - \frac{\beta}{c}\int\limits_0^t \sin c(t-\tau)[E_1(a_1\tau) + G_1(-a_1\tau)]\,d\tau, \tag{6.13}$$

где

$$F_1(t) = y^0 \cos ct + \frac{y^1}{c}\sin ct + \frac{1}{c}\int\limits_0^t \sin c(t-\tau)\mu(\tau)\,d\tau. \tag{6.14}$$

Введем функции w_i, положив $G_i(-a_i t) = w_i(t)$. Отсюда следует, что $G'_i(-a_i t) = -\dfrac{\dot w_i(t)}{a_i}$ и соотношение (6.13) можно представить следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{a_i}\,\dot w_i(t) + \frac{\beta}{c}\int\limits_0^t \sin c(t-\tau)w_1(\tau)\,d\tau = F_2(t), \tag{6.15}$$

где

$$F_2(t) = \sum_{i=1}^{m} k_i E'_i(a_i t) - \\ - \frac{\beta}{c}\int\limits_0^t \sin c(t-\tau)E_1(a_1\tau)\,d\tau - F_1(t). \tag{6.16}$$

С другой стороны, в силу условия (6.5) выполняются равенства

$$E_1(a_1 t) + w_1(t) = \ldots = E_m(a_m t) + w_m(t).$$

Отсюда следует:

$$w_i(t) = w_1(t) + E_1(a_1 t) - E_i(a_i t),$$
$$\dot w_i(t) = \dot w_1(t) + a_1 E_1'(a_1 t) - a_i E_i'(a_i t),$$

для $i = 2, \ldots, m$. Поэтому соотношение (6.15) можно записать в виде

$$\varkappa \dot w_1(t) + \frac{\beta}{c}\int_0^t \sin c(t-\tau) w_1(\tau)\, d\tau = F(t), \quad \varkappa = \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{a_i}, \tag{6.17}$$

здесь

$$F(t) = F_2(t) - \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{a_i}\,[a_1 E_1'(a_1 t) - a_i E_i'(a_i t)]. \tag{6.18}$$

Соотношение (6.17) можно рассматривать как уравнение относительно $w_1(t)$. Это уравнение будем решать, используя операционное исчисление. Полагая:

$$\overline{w}_1(p) = \int_0^\infty e^{-pt} w_1(t)\, dt, \qquad \overline{F}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} F(t)\, dt,$$

из (6.17) получаем

$$\varkappa[p\overline{w}_1(p) - w_1(0)] + \frac{\beta}{c}\,\frac{c}{p^2+c^2}\,\overline{w}_1(p) = \overline{F}(p),$$

и, следовательно,

$$\overline{w}_1(p) = \frac{p^2+c^2}{p^3+c^2p+\beta/\varkappa}\left[w_1(0) + \frac{\overline{F}(p)}{\varkappa}\right]. \tag{6.19}$$

Рассмотрим уравнение $p^3 + c^2 p + \beta/\varkappa = 0$. Это уравнение может иметь либо три различных действительных корня, либо один действительный корень и два комплексно сопряженных корня, поскольку $c^2 > 0$.

1. *Случай различных действительных корней.* Справедливо равенство

$$p^3 + c^2 p + \beta/\varkappa = (p-\alpha_1)(p-\alpha_2)(p-\alpha_3),$$

$\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$. В этом случае дробь в выражении (6.19) представим в виде

$$\frac{p^2 + c^2}{p^3 + c^2 p + \beta/\varkappa} = \frac{A_1}{p - \alpha_1} + \frac{A_2}{p - \alpha_2} + \frac{A_3}{p - \alpha_3},$$

константы A_i, $i = 1, 2, 3$, находятся однозначно. С помощью обратного преобразования Лапласа из уравнения (6.19) находим

$$w_1(t) = w_1(0)K(t) + \frac{1}{\varkappa}\int\limits_0^t K(t - \tau)F(\tau)\,d\tau, \tag{6.20}$$

где

$$K(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + A_3 e^{\alpha_3 t}. \tag{6.21}$$

2. *Случай одного действительного и двух комплексно сопряженных корней.* Имеет место равенство

$$p^3 + c^2 p + \beta/\varkappa = (p - \alpha_1)((p - \alpha)^2 + \beta^2),$$

$\alpha_1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \neq \alpha$, и дробь из выражения (6.19) есть сумма простейших дробей

$$\frac{p^2 + c^2}{p^3 + c^2 p + \beta/\varkappa} = \frac{A_1}{p - \alpha_1} + \frac{A_2(p - \alpha)}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{A_3\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

Обратное преобразование Лапласа, примененное к уравнению (6.19), позволяет найти функцию w_1, которая имеет вид (6.20) и

$$K(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha t}\cos\beta t + A_3 e^{\alpha t}\sin\beta t. \tag{6.22}$$

Замечание 6.1. В силу введенных обозначений справедливо равенство

$$\overline{K}(p) = \frac{p^2 + c^2}{p^3 + c^2 p + \beta/\varkappa}, \tag{6.23}$$

а функции K вида (6.21) и (6.22) обладают следующими свойствами:

$$K(0) = 1, \quad K'(0) = 0. \tag{6.24}$$

Таким образом, из равенства (6.20) с учетом обозначений $G_i(-a_i t) = w_i(t)$ для $i = 1, \ldots, m$, находим для $z \geqslant 0$

$$G_1(-z) = \frac{\varphi_1(0)}{2} K(z/a_1) + \frac{1}{\varkappa} \int\limits_0^{z/a_1} K(z/a_1 - \tau) F(\tau)\, d\tau. \quad (6.25)$$

Функция K определяется однозначно в зависимости от того, каковы корни уравнения $p^3 + c^2 p + \beta/\varkappa = 0$, эта функция имеет выражения, приведенные в (6.21) и (6.22). Остальные функции $G_i(-z)$ для $i = 2, \ldots, m$ определяются формулами

$$G_i(-z) = G_1(-a_1 z/a_i) + E_1(a_1 z/a_i) - E_i(z), \quad (6.26)$$

для $z \geqslant 0$. Из (6.25) и (6.26) получаем для $z \geqslant 0$

$$G_i(-z) = \frac{\varphi_1(0)}{2} K(z/a_i) + \\ + \frac{1}{\varkappa} \int\limits_0^{z/a_i} K(z/a_i - \tau) F(\tau)\, d\tau + \mathscr{E}_i(z/a_i), \quad (6.27)$$

введено обозначение $\mathscr{E}_i(t) = E_1(a_1 t) - E_i(a_i t)$, $i = 1, \ldots, m$. Функции $\mathscr{E}_i(t)$ в силу равенств (6.8) и (6.11) обладают следующим свойством: $\mathscr{E}_i(0) = 0$.

Если $0 \leqslant z \leqslant \ell$, то функции $E_i(z)$ и $G_i(z)$ определяются с помощью выражений (6.11); при $0 \leqslant z \leqslant \ell$ функции $E_i(\ell + z)$ определяются в (6.12), а $G_i(\ell - z)$ определены в (6.11); для $z \geqslant \ell$ значения функций $E_i(\ell + z)$ по-прежнему находятся с помощью выражений (6.12), а значения функций $G_i(\ell - z)$, где $\ell - z \leqslant 0$, определены в (6.27).

Заметим, что функции G_i, $i = 1, \ldots, m$, определяемые выражениями (6.11) и (6.27), в точке $z = 0$ являются непрерывно дифференцируемыми. Для доказательства этого факта следует воспользоваться свойствами (6.24) функции K. Аналогично, функции E_i, определяемые формулами (6.11) и (6.12), также непрерывно дифференцируемы при $z = \ell$. Поэтому функции $u^i = u^i(x,t)$, $i = 1, \ldots, m$, из (6.10) являются непрерывно дифференцируемыми на ∂Q_i.

Поскольку функции $u^i = u^i(x,t)$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяют волновому уравнению (6.1), то функции φ_i и ψ_i, задающие начальные условия (6.2) и участвующие в определении функций $E_i(z)$ и $G_i(z)$ при $0 \leqslant z \leqslant \ell$, удовлетворяют следующим условиям: $\varphi_i(x) \in C^2[0,\ell]$ и $\psi_i(x) \in C^1[0,\ell]$.

Теорема 6.1. *Предположим, что для функций φ_i из $C^2[0,\ell]$ и ψ_i из $C^1[0,\ell]$ выполнены условия* (6.8) *при $i = 1,\ldots,m$. Тогда каждая функция $\mu \in C[0,T]$ однозначно определяет единственные решения $u^i = u^i(t,x)$ из $C^2(\overline{Q})$, $i = 1,\ldots,m$, задачи* (6.1)–(6.6), *которые представимы в виде* (6.10). *Здесь E_i и G_i для $i = 1,\ldots,m$ заданы при $0 \leqslant x \leqslant \ell$ формулами* (6.11); *при $z \geqslant 0$ функции $E_i(\ell+z)$ имеют вид* (6.12), *а функции $G_i(-z)$ определяются формулами* (6.27).

6.3. Решение задачи управляемости. Обозначим $t_i = \ell/a_i$ для $i = 1,\ldots,m$. Гашение колебаний сети возможно лишь при условии соизмеримости моментов времени t_i, $i = 1,\ldots,m$, т. е. при условии существования таких чисел $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,\ldots,m$, что $a_1/n_1 = \ldots = a_m/n_m$.

6.3.1. *Случай* $a_1 = a_2/2 = a_3/3 = \ldots = a_m/3$. Условия успокоения колебаний (6.9) за период времени

$$T = 2t_1 = 4t_2 = 6t_3 = \ldots = 6t_m$$

и решения (6.10) краевой задачи (6.1)–(6.6) приводят к следующей системе уравнений:

$$E_1(x+2\ell) = -A_1, \quad G_1(x-2\ell) = A_1, \tag{6.28}$$

$$E_2(x+4\ell) = -A_2, \quad G_2(x-4\ell) = A_2, \tag{6.29}$$

$$E_j(x+6\ell) = -A_j, \quad G_j(x-6\ell) = A_j,\ j = 3,\ldots,m, \tag{6.30}$$

здесь A_j — некоторые постоянные.

Из (6.28) будем искать управляющую функцию μ, позволяющую погасить колебания системы. Используя свойства (6.12) и (6.25) функций $E_1(\ell+z)$ и $G_1(-z)$ соответственно, из первого уравнения в (6.28) получаем равенство $G_1(-x) = A_1$, а из второго уравнения в (6.28) находим $G_1(-(2\ell - x)) = A_1$. Из непрерывности функций G_1 в нуле выражения (6.11) и свойства (6.8) получаем $A_1 = \varphi_1(0)/2$. Таким образом, для $0 \leqslant t \leqslant 2t_1$ справедливо равенство

$$\frac{\varphi_1(0)}{2} = \frac{\varphi_1(0)}{2}\,K(t) + \frac{1}{\varkappa}\int\limits_0^t K(t-\tau)F(\tau)\,d\tau. \qquad (6.31)$$

Выразим из (6.31) функцию F, поскольку она содержит управляющую функцию μ. Для этого опять воспользуемся операционным исчислением, получаем

$$\frac{\varphi_1(0)}{2}\,\frac{1}{p} = \frac{\varphi_1(0)}{2}\,\overline{K}(p) + \frac{1}{\varkappa}\,\overline{K}(p)\overline{F}(p).$$

Далее используем выражение (6.23) для функции $\overline{K}(p)$, после упрощения выражения находим

$$\overline{F}(p) = \frac{\varphi_1(0)}{2}\,\frac{\beta}{c^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+c^2}\right).$$

Обратное преобразование Лапласа, примененное к полученному равенству, позволяет определить функцию F:

$$F(t) = \frac{\varphi_1(0)}{2}\,\frac{\beta}{c^2}\,(1-\cos ct). \qquad (6.32)$$

Для того чтобы найти функцию управления μ, преобразуем выражение (6.32), для этого воспользуемся равенствами (6.14), (6.16) и (6.18), приходим к уравнению

$$-\frac{1}{c}\int\limits_0^t \sin c(t-\tau)\mu(\tau)\,d\tau = \mathscr{F}(t), \qquad (6.33)$$

где

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(t) = {}&\left(y^0 - \frac{\varphi_1(0)}{2}\,\frac{\beta}{c^2}\right)\cos ct + \\ &+ \frac{y^1}{c}\,\sin ct + \frac{\beta}{c}\int\limits_0^t \sin c(t-\tau)E_1(a_1\tau)\,d\tau + \\ &+ a_1\varkappa E_1'(a_1 t) - 2\sum_{i=1}^m k_i E_i'(a_i t) + \frac{\varphi_1(0)}{2}\,\frac{\beta}{c^2}. \qquad (6.34)\end{aligned}$$

Из (6.33) и (6.34) следует, что $\mu(t) = -\left[\mathscr{F}''(t) + c^2\mathscr{F}(t)\right]$. И искомую функцию $\mu(t)$ можно представить в виде

$$\mu(t) = \varkappa_1[a_1^3 E_1'''(a_1 t) + c^2 a_1 E_1'(a_1 t)] - \beta E_1(a_1 t) + \\ + 2\sum_{i=2}^{m} \frac{k_i}{a_i} \left[a_i^3 E_i'''(a_i t) + c^2 a_i E_i'(a_i t)\right] - \beta\,\frac{\varphi_1(0)}{2}, \qquad (6.35)$$

где $\varkappa_1 = k_1/a_1 - k_2/a_2 - \ldots - k_m/a_m$.

Система уравнений (6.29) дает дополнительные условия на функции $\varphi_2(x)$ и $\psi_2(x)$. Из равенств (6.12), (6.27) и (6.31) получаем:

$$\begin{aligned} A_2 &= \varphi_1(0) - G_1(\ell - x/2) + E_1(x/2) - E_2(x), \\ A_2 &= \varphi_1(0) - G_1(x/2) + E_1(\ell - x/2) + G_2(x). \end{aligned} \qquad (6.36)$$

Из системы (6.36) находим, используя выражения (6.11) для $E_j(x)$ и $G_j(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant \ell$:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \varphi_1(x/2) - \varphi_1(\ell - x/2), \\ \psi_2(x) &= \psi_1(x/2) - \psi_1(\ell - x/2). \end{aligned} \qquad (6.37)$$

С помощью выражений (6.30) получаем условия на функции φ_j и ψ_j при $j = 3, \ldots, m$, для $0 \leqslant x \leqslant \ell$:

$$\begin{gathered} \varphi_3(x) = \varphi_1(x/3) - \varphi_1([2\ell - x]/3) + \varphi_1([2\ell + x]/3), \\ \psi_3(x) = \psi_1(x/3) - \psi_1([2\ell - x]/3) + \psi_1([2\ell + x]/3), \\ \varphi_3(x) = \ldots = \varphi_m(x), \qquad \psi_3(x) = \ldots = \psi_m(x). \end{gathered} \qquad (6.38)$$

Полученные условия (6.37) и (6.38) на функции ψ_j для всех $j = 2, \ldots, m$ позволяют доказать непрерывность μ, определяемой выражением (6.35).

6.3.2. *Случай* $a_1 = a_2/n_2 = \ldots = a_m/n_m$ *для* $n_i \in \mathbb{N}$ *и* $n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_m$. Предполагается, что не все $n_i \geqslant 1$ различны. Время T, за которое возможно гашение колебаний сети, определяется следующим образом:

$$T = 2t_1 = 2n_2 t_2 = \ldots = 2n_m t_m,$$

$t_1 \geqslant \ldots \geqslant t_m$. Условия (6.9) имеют вид для $j = 2, \ldots, m$

$$\begin{aligned} E_1(x + 2\ell) &= -A_1, \quad G_1(x - 2\ell) = A_1, \\ E_j(x + 2n_j\ell) &= -A_j, \quad G_j(x - 2n_j\ell) = A_j. \end{aligned} \qquad (6.39)$$

С помощью уравнений для E_1 и G_1 системы (6.39) находим управляющую функцию $\mu = \mu(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant T$. Функция μ определяется равенством (6.35). Причем на каждом отрезке $[0, t_m]$, $[t_m, 2t_m]$, ..., $[(2n_m - 1)t_m, 2n_m t_m]$ функция μ в равенстве (6.35) определяется через функции $E_i(\ell + z)$ и $G_i(-z)$, $z \geqslant 0$, по свойствам (6.11), (6.12), (6.27) и (6.31).

Остальные уравнения системы (6.39) определяют условия на функции φ_j и ψ_j для $0 \leqslant x \leqslant \ell$. Если $n_j = 2k_j$ — четное, то

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= \sum_{i=0}^{k_j-1} \varphi_1\Big(\frac{i\ell}{k_j} + \frac{x}{n_j}\Big) - \sum_{i=1}^{k_j} \varphi_1\Big(\frac{i\ell}{k_j} - \frac{x}{n_j}\Big), \\ \psi_j(x) &= \sum_{i=0}^{k_j-1} \psi_1\Big(\frac{i\ell}{k_j} + \frac{x}{n_j}\Big) - \sum_{i=1}^{k_j} \psi_1\Big(\frac{i\ell}{k_j} - \frac{x}{n_j}\Big), \end{aligned} \tag{6.40}$$

если $n_j = 2k_j + 1$ — нечетное, то

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= \sum_{i=0}^{k_j} \varphi_1\Big(\frac{2i\ell}{n_j} + \frac{x}{n_j}\Big) - \sum_{i=1}^{k_j} \varphi_1\Big(\frac{2i\ell}{n_j} - \frac{x}{n_j}\Big), \\ \psi_j(x) &= \sum_{i=0}^{k_j} \psi_1\Big(\frac{2i\ell}{n_j} + \frac{x}{n_j}\Big) - \sum_{i=1}^{k_j} \psi_1\Big(\frac{2i\ell}{n_j} - \frac{x}{n_j}\Big), \end{aligned} \tag{6.41}$$

Теорема 6.2. *Пусть для $n_i \in \mathbb{N}$ выполнены равенства $a_1 = a_2/n_2 = \ldots = a_m/n_m$, где $n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_m$. Функции φ_j, принадлежащие $C^3[0, \ell]$, и ψ_j, принадлежащие $C^2[0, \ell]$, $j = 1, \ldots, m$, таковы, что выполняются равенства $\varphi_1(\ell) = \psi_1(\ell) = 0$, а φ_j и ψ_j, $j = 2, \ldots, m$, удовлетворяют условиям* (6.8) *и равенствам* (6.40) *для четного n_j, равенствам* (6.41) *для нечетного n_j. Тогда непрерывная на отрезке $[0, T]$ при $T = 2t_1$ управляющая функция $\mu = \mu(t)$, определяющая решения $u^i = u^i(x, t)$ краевой задачи* (6.1)–(6.6), *$i = 1, \ldots, m$, удовлетворяющие условиям* (6.9), *имеет вид* (6.35).

Более сложным является случай, когда выполнено следующее условие: $n_i > 1$, $i = 1, \ldots, m$. Рассмотрим частный случай $n_1 = 2$.

6.3.3. *Случай* $a_1/2 = a_2/3 = a_3/4 = \ldots = a_m/4$. Выполняются следующие равенства: $2t_1 = 3t_2 = 4t_3 = \ldots = 4t_m$. Успокоение колебаний системы возможно за период времени $T = 2t_1$. Условия гашения колебаний (6.9) принимают вид $i = 3, \ldots, m$:

$$E_1(x + 2\ell) = -A_1, \quad G_1(x - 2\ell) = A_1, \tag{6.42}$$

$$E_2(x + 3\ell) = -A_2, \quad G_2(x - 3\ell) = A_2, \tag{6.43}$$

$$E_i(x + 4\ell) = -A_i, \quad G_i(x - 4\ell) = A_i. \tag{6.44}$$

Из равенств (6.42) свойств (6.12) и (6.25) получаем выражение (6.31), и функция μ определяется в (6.35).

Система уравнений (6.43)–(6.44) определяет, каким дополнительным условиям должны удовлетворять функции φ_i и ψ_i, $i = 1, \ldots, m$, для того, чтобы система успокоилась за выбранный промежуток времени T.

Система (6.43), выражения (6.12), (6.25) и (6.31) приводят к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} A_2 - A_1 &= E_1(2\ell/3 + 2x/3) + G_2(\ell - x), \ 0 \leqslant x \leqslant \ell/2, \\ A_2 - A_1 &= -G_1(4\ell/3 - 2x/3) + G_2(\ell - x), \ \ell/2 \leqslant x \leqslant \ell, \end{aligned} \tag{6.45}$$

$$A_2 - 2A_1 = -G_1(2x/3) + E_1(2\ell/3 - 2x/3) - E_2(\ell - x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell, \tag{6.46}$$

здесь $A_1 = \varphi_1(0)/2$. В равенствах (6.45) и (6.46) для аргументов $\ell/2 \leqslant x \leqslant \ell$ сделаем замену $x = \ell - z$, $0 \leqslant z \leqslant \ell/2$. В итоге приходим к системе из четырех уравнений для $0 \leqslant x \leqslant \ell/2$:

$$\begin{aligned} A_2 - A_1 &= E_1(2\ell/3 + 2x/3) + G_2(\ell - x), \\ A_2 - 2A_1 &= -G_1(2x/3) + E_1(2\ell/3 - 2x/3) - E_2(\ell - x), \\ A_2 - A_1 &= -G_1(2\ell/3 + 2x/3) + G_2(x), \\ A_2 - 2A_1 &= -G_1(2\ell/3 - 2x/3) + E_1(2x/3) - E_2(x). \end{aligned}$$

Из полученной системы, используя выражения (6.11) для функций E_i и G_i, находим условия на функции φ_i, ψ_i при

$i=1,2$ для $0 \leqslant x \leqslant \ell/2$:

$$\varphi_2(x)-\varphi_2(\ell-x)=$$
$$=\varphi_1(2x/3)-\varphi_1(2\ell/3-2x/3)+\varphi_1(2\ell/3+2x/3),$$
$$\psi_2(x)-\psi_2(\ell-x)=$$
$$=\psi_1(2x/3)-\psi_1(2\ell/3-2x/3)+\psi_1(2\ell/3+2x/3),$$
$$\psi_2(x)+\psi_2(\ell-x)=$$
$$=a_1[\varphi_1'(2x/3)+\varphi_1'(2\ell/3-2x/3)-\varphi_1'(2\ell/3+2x/3)],$$
$$a_2[\varphi_2'(x)-\varphi_2'(\ell-x)]=$$
$$=\psi_1(2x/3)-\psi_1(2\ell/3-2x/3)-\psi_1(2\ell/3+2x/3).$$

Из равенств системы (6.44) получаем следующие условия на функции φ_i и ψ_i, $0 \leqslant x \leqslant \ell$:

$$\varphi_3(x)=\varphi_1(x/2)-\varphi_1(\ell-x/2),\ \varphi_3(x)=\ldots=\varphi_m(x)$$
$$\psi_3(x)=\psi_1(x/2)-\psi_1(\ell-x/2),\ \psi_3(x)=\ldots=\psi_m(x).$$

6.3.4. *Случай $a_1/2=a_2/n_2=\ldots=a_m/n_m$, среди чисел n_j имеются нечетные.* Если все $n_j \in \mathbb{N}$ — четные числа, то имеет место случай 6.3.2. В нашем случае выполняются равенства: $2t_1 = n_2t_2 = \ldots = n_mt_m$. Промежуток времени, за который возможно гашение колебаний рассматриваемой системы, равен $T=2t_1$. Условия успокоения колебаний (6.9) принимают следующий вид для $j=2,\ldots,m$:

$$E_1(x+2\ell)=-A_1, \quad G_1(x-2\ell)=A_1, \tag{6.47}$$
$$E_j(x+n_j\ell)=-A_j, \quad G_j(x-n_j\ell)=A_j. \tag{6.48}$$

По-прежнему, уравнения (6.47) определяют управляющую функцию μ вида (6.35), а уравнения (6.48) определяют дополнительные условия на функции φ_j и ψ_j.

Пусть n_j — четно. Если $n_j/2 = 2k_j$, то функции φ_j и ψ_j удовлетворяют условиям (6.40), если же выполнено равенство $n_j/2=2k_j+1$, то функции удовлетворяют (6.41), в этих условиях вместо n_j надо подставить $n_j'=n_j/2$. Итак, если $n_j'=2k_j$ — четное, то

$$\begin{cases} \varphi_j(x) = \sum\limits_{i=0}^{k_j-1} \varphi_1\Big(\dfrac{i\ell}{k_j} + \dfrac{x}{n'_j}\Big) - \sum\limits_{i=1}^{k_j} \varphi_1\Big(\dfrac{i\ell}{k_j} - \dfrac{x}{n'_j}\Big), \\ \psi_j(x) = \sum\limits_{i=0}^{k_j-1} \psi_1\Big(\dfrac{i\ell}{k_j} + \dfrac{x}{n'_j}\Big) - \sum\limits_{i=1}^{k_j} \psi_1\Big(\dfrac{i\ell}{k_j} - \dfrac{x}{n'_j}\Big), \end{cases} \tag{6.49}$$

если $n'_j = 2k_j + 1$ — нечетное, то

$$\begin{cases} \varphi_j(x) = \sum\limits_{i=0}^{k_j} \varphi_1\Big(\dfrac{2i\ell}{n'_j} + \dfrac{x}{n'_j}\Big) - \sum\limits_{i=1}^{k_j} \varphi_1\Big(\dfrac{2i\ell}{n'_j} - \dfrac{x}{n'_j}\Big), \\ \psi_j(x) = \sum\limits_{i=0}^{k_j} \psi_1\Big(\dfrac{2i\ell}{n'_j} + \dfrac{x}{n'_j}\Big) - \sum\limits_{i=1}^{k_j} \psi_1\Big(\dfrac{2i\ell}{n'_j} - \dfrac{x}{n'_j}\Big). \end{cases} \tag{6.50}$$

Пусть n_j — нечетно. Тогда, как и в п. 6.3.3, на функции φ_j и ψ_j накладываются четыре условия для $0 \leqslant x \leqslant \ell/2$:

$$\begin{cases} \varphi_j(x) - \varphi_j(\ell - x) = \\ \quad = \sum\limits_{i=0}^{k_j} \varphi_1\Big(\dfrac{2i\ell}{n_j} + \dfrac{2x}{n_j}\Big) - \sum\limits_{i=1}^{k_j} \varphi_1\Big(\dfrac{2i\ell}{n_j} - \dfrac{2x}{n_j}\Big), \\ \psi_j(x) - \psi_j(\ell - x) = \\ \quad = \sum\limits_{i=0}^{k_j} \psi_1\Big(\dfrac{2i\ell}{n_j} + \dfrac{2x}{n_j}\Big) - \sum\limits_{i=1}^{k_j} \psi_1\Big(\dfrac{2i\ell}{n_j} - \dfrac{2x}{n_j}\Big), \\ \psi_j(x) + \psi_j(\ell - x) = a_1 \sum\limits_{i=0}^{k_j} (-1)^i \varphi'_1\Big(\dfrac{2i\ell}{n_j} + \dfrac{2x}{n_j}\Big) - \\ \qquad\qquad - a_1 \sum\limits_{i=1}^{k_j} (-1)^i \varphi'_1\Big(\dfrac{2i\ell}{n_j} - \dfrac{2x}{n_j}\Big), \end{cases} \tag{6.51}$$

$$\begin{cases} a_j[\varphi'_j(x) - \varphi'_j(\ell - x)] = \sum\limits_{i=0}^{k_j} (-1)^i \psi_1\Big(\dfrac{2i\ell}{n_j} + \dfrac{2x}{n_j}\Big) + \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{i=1}^{k_j} (-1)^i \psi_1\Big(\dfrac{2i\ell}{n_j} - \dfrac{2x}{n_j}\Big). \end{cases} \tag{6.52}$$

Итак, справедлива теорема.

ТЕОРЕМА 6.3. *Предположим, что выполнены равенства* $a_1/2 = a_2/n_2 = \ldots = a_m/n_m$, *где* $n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_m$, *не все* n_j *являются четными числами. Функции* φ_j *из* $C^3[0,\ell]$ *и* ψ_j *из* $C^2[0,\ell]$, $j = 1, \ldots, m$, *удовлетворяют условиям* (6.8) *и равенствам* (6.49) *для четного* $n'_j = n_j/2$ *и равенствам* (6.50) *для нечетного* $n'_j = n_j/2$, *а также равенствам* (6.51)–(6.52) *для нечетного* n_j. *Тогда непрерывная на отрезке* $[0, T]$ *при* $T = 2t_1$ *функция* μ, *определяющая решения* $u^i = u^i(x,t)$ *краевой задачи* (6.1)–(6.6), $i = 1, \ldots, m$, *удовлетворяющие условиям* (6.9), *имеет вид* (6.35).

Литература

[1] *Акуленко А.Д.* Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45, вып. 6. С. 1095–1103.

[2] *Акуленко А.Д.* Управление движением мембраны посредством силовых граничных воздействий // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 5. С. 731–741.

[3] *Алексеев Г.В.* Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. — М.: Научный мир, 2010. — 411 с.

[4] *Андреев Н.В., Мельник В.С.* Граничное управление нелинейными эллиптическими системами // ДАН УССР, сер. А. 1983. № 8. С. 63–66.

[5] *Аргучинцев А.В.* Оптимальное управление гиперболическими системами. М.: Физматлит, 2007. — 168 с.

[6] *Арман Ж.–Л.П.* Приложение теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. — М.: Мир, 1977. — 142 с.

[7] *Ахмедов Ф.Ш.* Оптимизация гиперболических систем при локальных краевых условиях типа Бицадзе–Самарского // Доклады АН СССР. 1996. Т. 283, № 4. С. 787–791.

[8] *Бабе Г.Д., Гусев Е.Л.* Математические методы оптимизации интерферecионных фильтров.—Новосибирск: Наука, 1982.— 216 с.

[9] *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. 384 с.

[10] *Баничук Н.В.* Оптимизация формы упругих тел. — М.: Наука, 1980. — 256 с.

[11] *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи с распределенными параметрами. — М.: Высшая школа, 1980. — 152 с.

[12] *Бачой Г.С., Егоров А.И.* Метод Беллмана в задачах управления системами с распределенными параметрами // Прикл. математика и програм. Вып. 12. — Кишинёв: Штиница, 1974.

[13] *Беллман Р.* Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960. — 400 с.

[14] *Бенсусан А., Лионс Ж.–Л.* Импульсное управление и квазивариационные неравенства. — М.: Наука, 1987. — 596 с.

[15] *Бобылев Н. А., Емельянов С, В., Коровин С. К.* Геометрические методы в вариационных задачах.—М.: Магистр, 1998.— 659. с.

[16] *Божко А.Е.* Оптимальное управление в системах воспроизведения вибраций. — Киев: Наукова думка, 1977.

[17] *Бокмельдер Е.П., Дыхта В.А.* Теоретические и прикладные вопросы оптимального управления. — Новосибирск: Наука, 1985. С. 40–58.

[18] *Болтянский В. Г.* Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования Изв. АН СССР. Сер. матем., 28:3 (1964), 481-514.

[19] *Борисович Ю.Г., Обуховский В.В.* О задаче оптимизации для управляемых систем параболического типа // Труды Математического ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 95–101.

[20] *Боровских А.В.* Формулы граничного управления неоднородной струной. I // Дифф. уравнения. 2007. Т. 43, № 1. — С. 64–89.

[21] *Боровских А.В.* Формулы граничного управления неоднородной струной. II // Дифф. уравнения. 2007. Т. 43, № 5. — С. 640–649.

[22] *Брандин В.Н.* Достаточные условия оптимальности в нелинейных системах с ограничениями на управление // Известия АН СССР, техн. кибернетика. 1977. № 6. С. 164–166.

[23] *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.

[24] *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975. — 474 с.

[25] *Бутковский А.Г., Малый С.А., Андреев Ю.Н.* Оптимальное управление нагревом металла. — М.: Металлургия, 1972.

[26] *Вайсборд Э.М.* Одна задача оптимального управления для систем с распределенными параметрами // Известия АН СССР, техн. кибернетика. 1966. № 6. С. 167–172.

[27] *Васильев О.В.* Оптимальность особых граничных управлений в системах с распределенными параметрами // Управляемые системы. 1979. № 18. С. 4–13.

[28] *Васильев О.В.* Методы оптимизации в функциональных пространствах. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1979. — 118 с.

[29] *Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.И.* Методы оптимизации и их приложения. — Новосибирск: Наука, 1990. — 150 с.

[30] *Васильев Ф.П.* О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения // Дифф. уравнения. 1965. Т. 31, № 11. — С. 1893–1900.

[31] *Васильев Ф.П.* О регуляризации некорректных задач минимизации на множествах, заданных приближенно // Журнал выч. математики и матем. физики. 1980. Т. 20, № 1. С. 38–40.

[32] *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1989. — 552 с.

[33] *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: в 2 кн. — М.: МЦНМО, 2011.

[34] *Васильев Ф.П., Ишмухамедов А.З., Потапов М.М.* Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 144 с.

[35] *Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М.* Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для уравнения колебаний струны // Вестник МГУ, сер. 15, выч. математика и кибернетика. — 1993. № 15. С. 8–15.

[36] *Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М., Разгулин А.В.* Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. — М.: Макс пресс, 2010.

[37] *Васницкий Л.И., Милосердов И.В.* Оптимальный гаситель продольных колебаний стержня // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 3. С. 537–540.

[38] *Величенко В.В.* Численные методы решения задач оптимального управления // Журнал выч. математики и матем. физики. 1966. Т. 6, № 4. С. 635–647.

[39] *Волин Ю.М., Островский Г.М.* Некоторые вопросы применения принципа максимума для определения оптимальных управлений в случае особых управлений и скользящих режимов // Известия АН СССР, техн. кибернетика. 1973. № 3.

[40] *Воронцов И.И.* Об оптимальности управления колебательными процессами // Кибернетика. 1973. № 5. С. 100–105.

[41] *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. — 475 с.

[42] *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973. — 256 с.

[43] *Гамкрелидзе Р.В.* О скользящих оптимальных режимах// Доклады АН СССР. 1962. Т. 143, № 6. С. 1243–1245.

[44] *Галанин А. Д.* Введение в теорию ядерных реакторов на тепловых нейтронах. — М.: Энергоатомиздат, 1984 г. — 416 с.

[45] *Гасанов З.М.* Приближенный синтез оптимального управления системами с распределенными параметрами при неполных и неточных измерениях. — Автоматика. № 4. 1990. — С. 72–76.

[46] *Гебель М.* Задача об управлении для уравнений эллиптического типа // Кибернетика. 1978. № 1. С. 28–35.

[47] *Гогодзе И.К.* Необходимые условия оптимальности в эллиптических задачах управления с интегральными ограничениями // Сообщения АН Груз. ССР. 1976. Т. 81, № 1. С. 17–20.

[48] *Гогодзе И.К.* Оптимизация линейной эллиптической системы в условиях неопределенности // Сообщения АН Груз. ССР. 1978. Т. 92, № 3. С. 545–548.

[49] *Горчаков В.Н.* Об одной задаче оптимального управления системой, описываемой эллиптическим дифференциальным уравнением // Кибернетика. 1974. № 3.

[50] *Гринев В.Б., Филиппов А.П.* Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. — Киев: Наукова думка, 1975. — 294 с.

[51] *Губарев В.Ф.* Динамика систем управления положением плазменного шнура в токомаке // Автоматика. 1979. № 5. С. 27–34.

[52] *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. — М.: Наука, 1985. — 288 с.

[53] *Гурман В.И., Знаменская Л.Н.* Управление колебаниями при ограниченном ресурсе управления // Известия РАН. Теория и системы управления. 2002. № 1. С. 41–49.

[54] *Данилов В.Я., Федорченко М.С.* Оптимальное по быстродействию управление упругими объектами // Вестник Киевского ун-та. Выч. и прикл. математика. 1976. Вып 18. С. 120–123.

[55] *Данилов В.Я., Фоменко А.В.* Об оптимальном управлении в задаче демпфирования периодических колебаний распределенных систем // Вестник Киевского ун-та. Выч. и прикл. математика. 1962. Вып. 47. С. 123–125.

[56] *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. — М.: Машиностроение, 1986. — 216 с.

[57] *Дементьев Б.А.* Кинетика и регулирование ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1973.

[58] *Дигас Б.В., Максимов В.И.* О моделировании управлений в параболических системах // Журнал выч. математики и матем. физики. 1998. Т. 40, № 3. С. 125–132.

[59] *Дикуссар В.В., Милютин А.А.* Качественные и численные методы в принципе максимума. — М.: Наука, 1989. — 143 с.

[60] *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Теория принципа максимума // Методы теории экстремальных задач в экономике. — М.: Наука, 1980. С. 6–47.

[61] *Егоров А.И.* Об оптимальном управлении процессами в распределенных объектах // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, № 4. С. 688–696.

[62] *Егоров А.И.* Об одной вариационной задаче в теории уравнений эллиптического типа // Сибирский матем. журнал. 1964. Т. 5, № 3.

[63] *Егоров А.И.* Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Известия АН СССР, сер. матем. 1965. Т. 29, № 6. С. 1205–1256.

[64] *Егоров А.И.* Об оптимальных процессах в системах, содержащих объекты с распределенными параметрами. I , II// Автоматика и телемеханика. 1965. Т. 26, № 6. С. 977–994; 1965; Т. 26, № 7. С. 1063–1079.

[65] *Егоров А.И.* Об условиях оптимальности в одной задаче управления процессом теплопередачи // Журнал выч. математики и матем. физики. 1972. Т. 12, № 3.

[66] *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978. — 464 с.

[67] *Егоров А.И.* Управление упругими колебаниями // Доклады АН УССР. Сер. А. 1986. № 5. С. 60–63.

[68] *Егоров А.И.* Оптимальное управление линейными системами. — Киев: Высшая школа, 1988.

[69] *Егоров А.И.* Основы теории управления. — М.: Физматлит, 2004. — 504 с.

[70] *Егоров А.И.* О наблюдаемости упругих колебаний балки // Журнал выч. математики и матем. физики. 2008. Т. 48, № 6. С. 967–973.

[71] *Егоров А.И., Бачой Г.С.* О решении одной задачи синтеза оптимального управления процессом теплопроводности // Прикл. математика и програм. Вып. 14. — Кишинёв: Штиинца, 1975.

[72] *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Управления колебаниями связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Журнал выч. математики и матем. физики. 2005. Т. 45, № 10.С. 1766–1784.

[73] *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости колебаний системы связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Журнал выч. математики и матем. физики. 2006. Т. 46, № 6. С. 1002–1018.

[74] *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Управляемость упругих колебаний систем с распределенными и сосредоточенными параметрами по двум границам // Журнал выч. математики и матем. физики. 2006. Т. 46, № 11. С. 2032–2044.

[75] *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* О граничной наблюдаемости упругих колебаний связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 2007. № 2. С. 95–102.

[76] *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Журнал выч. математики и матем. физики. 2009. Т. 49, № 5. С. 815–825.

[77] *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Наблюдаемость за упругими колебаниями сети с распределенными и сосредоточенными параметрами // Известия Иркутского ун-та. Сер. матем. 2009. Т. 2, № 1. С. 197–201.

[78] *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Наблюдаемость упругих колебаний сети с распределенными и сосредоточенными параметрами по свободным границам // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 76–81.

[79] *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Наблюдаемость колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами в точке соединения // Вестник СПб ун-та. Сер. 10. 2011. Вып. 1. С. 143–147.

[80] *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. — С. 85–92.

[81] *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Граничная наблюдаемость упругих колебаний системы последовательно соединенных струн // Журнал выч. математики и матем. физики. 2012. Т 52, № 9. С. 1614–1620.

[82] *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости упругих колебаний системы последовательно соединенных объектов

с распределенными параметрами со свободными границами // Труды МФТИ. 2012. Т. 4, № 4. — С. 62–68.

[83] *Егоров А.И., Капустян В.Е.* Точечное управление колебаниями // Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. Кишинев: Штиинца, 1981. С. 34–41.

[84] *Егоров А.И., Кирьян С.В.* Об оптимальной стабилизации упругих поперечных колебаний // Приближенное решение задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. — Фрунзе: Илим, 1976. С. 51–57.

[85] *Егоров А.И., Рафатов Р.Р.* О приближенном решении одной задачи оптимального управления // Журнал выч. математики и матем. физики. 1972. Т. 12, № 4.

[86] *Егоров А.И., Рафатов Р.Р.* Математические методы оптимизации процессов теплопроводности и диффузии. — Фрунзе: Илим, 1990. — 337 с.

[87] *Егоров А.И., Фоменко А.В.* Об оптимальной стабилизации упругих систем // Динамика управляемых систем. — Новосибирск: Наука, 1979. С. 111–120.

[88] *Егоров А.И., Шакиров В.Н.* Оптимальное управление колебаниями проводника с током в магнитном поле // Математические методы в механике. — Кишенев: Штиинца, 1980. С. 34–38.

[89] *Егоров А.И., Шакиров В.Н.* Оптимальное управление колебаниями проводника с током // Оптимизация и устойчивость систем с распределенными параметрами. — Фрунзе: Илим, 1980. С. 59–75.

[90] *Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. — М.: Физматлит, 2002.

[91] *Знаменская Л.Н.* Априорные оценки обобщенных решений волнового уравнения // Дифф. уравнения. 2001. Т. 37, № 8. С. 1062–1070.

[92] *Знаменская Л.Н.* Граничное управление на двух концах волновым уравнением в классе обобщенных решений из L_2 // Доклады РАН. 2001. Т. 380, № 6. С. 746–748.

[93] *Знаменская Л.Н.* Управление колебаниями струны в классе обобщенных решений из L_2 // Дифф. уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 666–672.

[94] *Знаменская Л.Н.* Управляемость колебаниями струны с одним закрепленным концом при ограничениях на управление // Дифф. уравнения. 2003. Т. 39, № 3. С. 377–382.

[95] *Знаменская Л.Н* Задача граничного наблюдения за колебаниями струны // Программные системы: теория и приложения. Т. 2. — М.: Физматлит, 2004. С. 331–347.

[96] *Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниями. — М.: Физматлит, 2004. — 176 с.

[97] *Знаменская Л.Н.* Наблюдаемость упругих колебаний систем с распределенными и сосредоточенными параметрами по двум границам // Журнал выч. математики и матем. физики. 2007. Т. 47, № 6. С. 944–958.

[98] *Знаменская Л.Н.* Наблюдаемость по состоянию упругих колебаний струны при краевых условиях первого рода // Дифф. уравнения. 2010. Т. 46, № 5. С. 743–747.

[99] *Знаменская Л.Н., Потапова З.Е.* Задачи граничной наблюдаемости упругих колебаний, описываемых системой телеграфных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2007. № 2. С. 103–112.

[100] *Зубов В.И.* Динамика управляемых систем. — М.: Высшая школа, 1982. — 285 с.

[101] *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975. 496 с.

[102] *Зубов В.И.* Колебания и волны. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1989. 416 с.

[103] *Иваненко В.И., Мельник В.С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. — Киев: Наукова думка, 1988. — 286 с.

[104] *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах // Доклады РАН. 1999. Т. 369, № 5. С. 592–596.

[105] *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце // Доклады РАН. 1999. Т. 369, № 6. С. 732–735.

[106] *Ильин В.А.* Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени // Дифф. уравнения. 1999. Т. 35, № 11. С. 1517–1534.

[107] *Ильин В.А.* Волновое уравнение с граничным управлением на одном конце при закрепленном втором конце // Дифф. уравнения. 1999. Т. 35, Т 12. С. 1640–1659.

[108] *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифф. уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1513–1528.

[109] *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифф. уравнения. 2000. Т. 36, № 12. С. 1670–1686.

[110] *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний струны на двух концах при условии существования конечной энергии // Доклады РАН. 2001. Т. 376, № 3. С. 295–299.

[111] *Ильин В.А.* Граничное управление процессом колебаний струны на одном конце при закрепленным втором конце и при условии существования конечной энергии // Доклады РАН. 2001. Т. 378, № 6. С. 743–746.

[112] *Ильин В.А.* Граничное управление сферически симметричными колебаниями трехмерного шара // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2001. Т. 232. С. 144–155.

[113] *Ильин В.А.* Единственность обобщенных решений смешанных задач для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифф. уравнения. 2008. Т. 44, № 5. — С. 672–680.

[114] *Ильин В.А.* Оптимизация граничного управления на одном конце струны при наличии модельного нелокального граничного условия // Дифф. уравнения. 2008. Т. 44, № 11. — С. 1487-1498.

[115] *Ильин В.А.* О продольных колебаниях стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости, в случае совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков // Доклады РАН. 2009. Т. 429, № 6. С. 742–745.

[116] *Ильин В.А.* Смешанная задача, описывающая процесс успокоения колебаний стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости, в случае совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2010. Т. 269. С. 133–142.

[117] *Ильин В.А.* О приведении в произвольно заданное колебание первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // Доклады РАН. 2010. Т. 435, № 6. С. 732–735.

[118] *Ильин В.А.* Оптимизация производимого упругой силой граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков // Доклады РАН. 2011. Т. 440, № 6. С. 731–735.

[119] *Ильин В.А.* Схема оптимизации граничного управления смещением на двух концах процессом колебания стержня, состоящего из двух разнородных участков // Доклады РАН. 2011. Т. 441, № 6. С. 731–733.

[120] *Ильин В.А.* Оптимизация производимого смещением граничного управления колебаниями стержня, состоящего из

двух разнородных участков // Дифф. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 978–986.

[121] *Ильин В.А.* Оптимизация производимого упругой силой граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков // Доклады РАН. 2011. Т. 440, № 6. С. 731–735.

[122] *Ильин В.А.* О полном успокоении с помощью граничного управления на одном конце колебаний неоднородного стержня // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 88–96.

[123] *Ильин В.А., Луференко П.В.* Смешанные задачи, описывающие продольные колебания стержня, состоящего из двух участков, имеющие разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы // Доклады РАН. 2009. Т. 428, № 1. — С. 12–15.

[124] *Ильин В.А., Луференко П.В.* Аналитический вид оптимальных граничных управлений продольными колебаниями стержня, состоящего из двух участков, имеющие разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы // Доклады РАН. 2009. Т. 429, № 4. — С. 455–458.

[125] *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением // Доклады РАН. 2002. Т. 387, № 5. С. 600–603.

[126] *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением // Доклады РАН. 2004. Т. 394, № 2. С. 154–158.

[127] *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимальное граничное управление смещением на одном конце при закрепленном втором конце и отвечающее ему распределение полной энергии струны // Доклады РАН. 2004. Т. 399, № 6. С. 727–731.

[128] *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи матем. наук. 2005. Т. 60, вып. 6. С. 89–114.

[129] *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Минимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени T интеграла от модуля производной, производимого смещением граничного управления, возведенного в произвольную степень $p \geqslant 1$ // Дифф. уравнения. 2006. Т. 42, № 11. С. 1558–1570.

[130] *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени граничного управления колебаниями струны упругой силой // Дифф. уравнения. 2006. Т. 42, № 12. С. 1699–1711.

[131] *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничных управлений смещением на двух концах струны за произвольный достаточно большой промежуток времени// Доклады РАН. 2007. Т. 417, № 2. С. 160–166.

[132] *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимальное граничное управление упругой силой на одном конце струны при свободном втором ее конце за произвольный достаточно большой промежуток времени // Дифф. уравнения. 2007. Т. 43, № 12. С. 1655–1663.

[133] *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Граничное управление колебаниями струны, минимизирующее интеграл от степени $p \geqslant 1$ модуля управления или его производной // Автоматика и телемеханика. 2007. № 2. С. 113–119.

[134] *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация управления на двух концах струны упругими силами за любой достаточно большой промежуток времени // Дифф. уравнения. 2008. Т. 44, № 1. С. 89–110.

[135] *Ильин В.А., Тихомиров В.В.* Волновое уравнение с краевым управлением // Дифф. уравнения. 1999. Т. 35, № 1. — С. 135–138.

[136] *Ильин В.А., Тихомиров В.В.* Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса // Дифф. уравнения. 1999. Т. 35, № 5. С. 692–704.

[137] *Исмаилов И.Г.* Некоторые задачи управления коэффициентами для эллиптических уравнений высокого порядка // Вестник МГУ, сер. 15. 1996. № 3. С. 22–30.

[138] *Ишмухамедов А.З.* Синтез оптимального управления для систем, описываемых гиперболическими уравнениями // Дифф. уравнения. 1985. Т. 21, № 4. С. 597–605.

[139] *Каниболоцкий М.А., Уржумцев Ю.С.* Оптимальное проектирование слоистых конструкций. — Новосибирск: Наука, 1989. — 176 с.

[140] *Капустян В.Е., Шамаев Е. В.* Оптимальное управление порядком асимптотик для эллиптических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. Часть 1. Формальные построения // Кибернетика и сист. анализ. 2004. № 5. С. 84–95.

[141] *Капустян В.Е., Шамаев Е. В.* Оптимальное управление порядком асимптотик для эллиптических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. Часть 2. Обоснование асимптотических разложений // Кибернетика и сист. анализ. 2005. № 3. С. 69–80.

[142] *Капустян В.Е., Капустян Е.А., Фартушный И. Д.* Асимптотики минимаксных оценок функционалов от решений

вырожденной параболической периодической краевой задачи // Компьютерная математика. 2007. № 1. С. 115–126.

[143] *Капустян В.Е, Когут О. П.* О существовании оптимальных управлений в коэффициентах для нелинейной краевой задачи Неймана // Дифф. уравнения. 2010. Т. 46, № 7. С. 915–930.

[144] *Капустян В.Е., Лазаренко И.С.* Оптимальная стабилизация распределенным управлением решений параболических уравнений с нелокальными краевыми условиями // Компьютерная математика. 2010. №2. С. 149–155.

[145] *Капустян В.Е., Лазаренко И.С.* Оптимальная стабилизация сосредоточенным управлением решений параболических уравнений с нелокальными краевыми условиями // Компьютерная математика. 2011. № 2. С. 133–141.

[146] *Капустян В. Е., Пышнограев И. А.* Приближенное оптимальное управление в задаче для параболо-гиперболического уравнения с нелокальными краевыми условиями и полуопределенным критерием качества // Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2013. № 4 (114). С. 24–36.

[147] *Керимов А.К.* Об аппроксимации по Галёркину задачи оптимального управления для системы с распределенными параметрами параболического типа // Журнал выч. математики и матем. физики. 1979. Т. 19, № 4. С. 851–865.

[148] *Ким А.В., Короткий А.И.* Динамическое моделирование возмущений в параболических системах // Известия АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 6. С. 35–41.

[149] *Ким А.В., Короткий А.И., Осипов Ю.С.* Обратные задачи динамики для параболических систем // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, № 5. С. 419–425.

[150] *Комков В.* Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. — М.: Мир, 1975. — 158 с.

[151] *Кононенко В.О.* Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. — 256 с.

[152] *Корбич Ю.С., Максимов В.И., Осипов Ю.С.* Динамическое моделирование управлений в некоторых параболических системах // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, № 3. С. 305–315.

[153] *Коровина О.В., Прядиев В.Л.* Структура решения смешанной задачи для волнового уравнения на компактном геометрическом графе в случае ненулевой начальной скорости // Известия Саратовского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, № 3. С. 37–46.

[154] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 476 с.

[155] *Кривенков Ю.П.* Достаточные условия оптимальности для задачи с дифференциальным уравнением второго порядка эллиптического типа при наличии фазовых ограничений // Дифф. уравнения. 1975. Т. 11, № 1. С. 85–99.

[156] *Кротов В.Ф.* Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума. I // Автоматика и телемеханика. 1962. Т. 23, № 12. С. 1571–1582.

[157] *Кротов В.Ф.* Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума. II // Автоматика и телемеханика. 1963. Т. 24, № 5. С. 581–598.

[158] *Кузнецов Ю.А.* О необходимых условиях оптимальности в задаче оптимального управления системой, описываемой уравнением эллиптического типа // Сибирский матем. журнал. 1979. Т. 20, № 3. С. 586–596.

[159] *Кулешов А.А.* О четырех смешанных задачах для уравнения колебаний струны с однородными нелокальными условиями // Дифф. уравнения. 2009. Т. 45, № 6. С. 810–817.

[160] *Кулешов А.А.* Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня со свободным либо закрепленным правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Доклады РАН. 2012. Т. 442, № 4. С. 451–454.

[161] *Кулешов А.А.* Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости // Доклады РАН. 2012. Т. 442, № 5. С. 594–597.

[162] *Кулиев Г.Ф.* Задача точечного управления для гиперболического уравнения // Автоматика и телемеханика. 1993. Т. 80, № 3. С. 80–84.

[163] *Ладиков Ю.П.* Стабилизация процессов в сплошных средах. — М.: Наука, 1978. — 432 с.

[164] *Лебедев П.Д., Зуев А. И.* Сушка древесины в жидких средах. — М.;Л.: Госэнергоиздат, 1957.

[165] *Левитин Е.С., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями // Успехи матем. наук. 1978. Т. 28, № 6. С. 83–148.

[166] *Лётов А.М.* Динамика полета и управление. — М.: Наука, 1969. — 360 с.

[167] *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. —414 с.

[168] *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. — М.: Наука, 1987.

[169] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.

[170] *Литвинов В.Г.* Оптимальное управление коэффициентами в эллиптических системах // Дифф. уравнения. 1982. Т. 18, № 6. С. 1036–1047.

[171] *Литвинов В.Г.* Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. — М.: Наука, 1987. — 368 с.

[172] *Лубышев Ф.В., Файрузов М.Э.* Аппроксимация и регуляризация ЗОУ для квазилинейных эллиптических уравнений // Журнал выч. математики и матем. физики. 2001. Т. 41, № 8. С. 1148–1164.

[173] *Лубышев Ф.В., Манапова А.Р.* О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах // Журнал выч. математики и матем. физики. 2007. Т. 47, № 3. С. 376–396.

[174] *Лурье К.А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. — М.: Наука, 1975. —478 с.

[175] *Матвеев А.С., Сугак Д.В.* Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления системой эллиптического типа с фазовыми ограничениями // Труды СПб ун-та, сер. 1. 1999. № 3. С. 20–28.

[176] *Мельник В.С.* Метод монотонных операторов в теории оптимального управления с ограничениями // Доклады АН УССР. 1984. А, № 7. С. 71–73.

[177] *Меркулов В.И.* Управление движением жидкости. — Новосибирск: Наука, 1981. — 174 с.

[178] *Михлин С.Г.* Вариационные методы математической физики. — М.: Наука, 1970. — 512 с.

[179] *Моисеев Е.И., Тихомиров В.В.* О волновом процессе с конечной энергией при заданном граничном режиме на одном конце и упругом закреплении на другом конце // Нелинейная динамика и управление. Т. 5. — М.: Физматлит, 2007. — С. 141–147.

[180] *Моисеев Н.Н.* Методы динамического программирования в теории оптимального управления // Журнал выч. математики и матем. физики. 1964. Т. 4, № 3. С. 485–495; 1965. Т. 5, № 1. С. 44–56.

[181] *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1971.

[182] *Морозов С.Ф., Сумин В.И.* Необходимые условия оптимальности для управления стационарными процессами переноса // Известия вузов. Матем. 1974. № 10. С. 46–56.

[183] *Морозов С.Ф., Сумин В.И.* Оптимизация нелинейных систем теории переноса // Журнал выч. математики и матем. физики. 1979. Т. 19, № 1. С. 99–111.

[184] *Ненахов Э.И., Горчаков В.Н.* Необходимые условия экстремума в задачах оптимального управления системами, описываемыми уравнениями с частными производными эллиптического типа // Кибернетика. 1972. № 2. С. 77–80.

[185] *Неронов В.С.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. — Алма-Ата: Изд-во Казахского ун-та. 1989. — 111 с.

[186] *Нестеренко Ю.Р.* О смешанной задаче для волнового уравнения с краевыми условиями третьего рода // Доклады РАН. Т. 426, № 1. С. 29–31.

[187] *Никитин А.А.* Минимизация интеграла от линейной комбинации граничного управления и его первообразной, производимая третьими краевыми условиями // Доклады РАН. 2007. Т. 417, № 6. С. 743–745.

[188] *Никитин А.А.* О смешанной задаче для волнового уравнения с третьим и первым краевыми условиями // Дифф. уравнения. 2007. Т. 43, № 12. С. 1692–1700.

[189] *Никитин А.А.* Оптимальное граничное управление колебаниями струны, производимое силой при упругом закреплении // Дифф. уравнения. 2011. Т. 46, № 12. С. 1773–1782.

[190] *Никитин А.А., Кулешов А.А.* Оптимизация граничного управления, производимого третьим краевым условием // Дифф. уравнения. 2008. Т. 44, № 5. С. 681–690.

[191] *Овсянников Д.А.* Моделирование и оптимизация пучков заряженных частиц. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1996.

[192] *Ольхофф Н.* Оптимальное проектирование конструкций. — М.: Мир, 1981. — 276 с.

[193] *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. — Екатеринбург: УрО РАН, 2011. — 292 с.

[194] *Петухов Л.В., Троицкий В.А.* Вариационные задачи оптимизации для уравнений гиперболического типа при наличии граничных управлений // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, № 2. С. 260–270.

[195] *Плотников В.И.* Об одной задаче оптимального управления стационарными системами с распределенными параметрами // Доклады АН СССР. 1966. Т. 170, № 2.

[196] *Плотников В. И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР, сер. матем., т. 32, вып. 4, 1968.

[197] *Плотников В.И.* О сходимости конечномерных приближений в задаче об оптимальном нагреве массивного тела произвольной формы // Журнал выч. математики и матем. физики. 1968. Т. 8, № 1. С. 136–157.

[198] *Плотников В.И.* Теоремы существования оптимизационных функций для оптимизационных систем с распределенными параметрами // Известия АН СССР, сер. матем. 1970. Т. 34, № 3. С. 689–711.

[199] *Плотников В.И.* Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида // Известия АН СССР. 1972. Т. 36, № 3. С. 652–679.

[200] *Плотников В.И., Новоженов М.М.* Обобщенное правило множителей Лагранжа для распределенных систем с фазовыми ограничениями // Дифф. уравнения. 1982. Т. 18, № 4. С. 584–592.

[201] *Плотников В.И., Сикорская Е.Р.* Оптимизация управляемого объекта, описываемого нелинейной системой гиперболических уравнений // Известия вузов. Радиотехника. 1972. Т. 15, № 3. С. 346–354.

[202] *Плотников В.И., Сумин В.И.* Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса–Дарбу // Журнал выч. математики и матем. физики. 1972. Т. 12, № 1. С. 61–77.

[203] *Плотников В.И., Сумин М.И.* О построении минимизирующих последовательностей в задачах управления системами с распределенными параметрами // Журнал выч. математики и матем. физики. 1982. Т. 22, № 1. С. 49–56.

[204] *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2005. — 275 с.

[205] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1974. — 392 с.

[206] *Потапов М.М.* Разностная аппроксимация задач дирихле–наблюдения слабых решений волнового уравнения с краевыми условиями III рода // Журн. выч. математики и матем. физики, 47:8 (2007), 1323–1339.

[207] *Потапов М.М.* Приближенное решение задач дирихле–управления для волнового уравнения в классах Соболева и двойственных к ним задач наблюдения // Журн. выч. математики и матем. физики, 46:12 (2006), 2191-2208.

[208] *Потапов М. М., Дряженков А. А.* Оптимизация порогового момента в неравенстве наблюдаемости для волнового уравнения с краевым условием упругого закрепления // Тр. МИАН, 277 (2012), 215-229.

[209] *Пузырёв В.И.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами (обзор) // Зарубежная радиоэлектроника. 1975. № 7. С. 38–57.

[210] *Пузырёв В.И.* Управление волновыми каналами // Зарубежная радиоэлектроника. 1977. № 10. С. 3–27.

[211] *Райтум У.Е.* О некоторых экстремальных задачах, связанных с линейным эллиптическим уравнением // Латв. матем. ежегодник. 1968. Вып. 4. С. 257–279.

[212] *Райтум У.Е* Экстремальные задачи для линейного эллиптического уравнения второго порядка // Латв. матем. ежегодник. 1976. Вып. 16. С. 198–213.

[213] *Райтум У.Е.* Расширение экстремальных задач, связанных с линейными эллиптическими уравнениями // Доклады АН СССР. 1978. Т. 243, № 2. С. 281–283.

[214] *Райтум У.Е.* Необходимые условия экстремума в задачах оптимального управления для нелинейных эллиптических уравнений // Сибирский матем. журнал. 1982. Т. 23, № 1. С. 144–152.

[215] *Райтум У.Е.* Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений. Математические вопросы. — Рига: Зинатне, 1989. — 312 с.

[216] *Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э.* Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. — М.: Наука, 2012. — 309 с.

[217] *Рево П.А., Чабакаури Г.Д.* Волновое уравнение с граничным управлением на левом конце при свободном правом конце и задача о полном успокоении колебательного процесса // Дифф. уравнения. 2000. Т. 36, № 6. С. 806–815.

[218] *Рей У.* Методы управления технологическими процессами. — М.: Мир, 1983.

[219] *Рейтман М.И., Шапиро Г.С.* Методы оптимального проектирования деформируемых тел. — М.: Наука, 1976. —266 с.

[220] *Ректорес К.* Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985. — 590 с.

[221] *Робертс С.* Динамическое программирование в процессах химической технологии и методы управления. — М.: Мир, 1965.

[222] *Рогожников А.М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков // Доклады РАН. 2011. Т. 441, № 4. С. 449–451.

[223] *Рогожников А.М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Доклады РАН. 2012. Т. 444, № 5. С. 488–491.

[224] *Рогожников А.М.* Оптимальное управление продольными колебаниями составных стержней с равным временем прохождения волны по каждому из участков // Дифф. уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 633–642.

[225] *Рогожников А.М.* Смешанная задача о возбуждении колебаний в составном стержне с присоединенными точечными массами // Доклады РАН. 2013. Т. 450, № 4. С. 389–392.

[226] *Рогожников А.М.* О различных типах граничных условий для одномерного уравнения колебаний // Сборник статей молодых ученых факультета ВМиК МГУ. 2013. Т. 10. С. 188-214.

[227] *Розоноэр Л.И.* Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем // Автоматика и телемеханика. 1959. № 10–12. С. 1320–1334; 1441–1458; 1561–1578.

[228] *Розоноэр Л.И.* Вариационный подход к проблеме инвариантности систем оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 1963. Т. 24, № 6.

[229] *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление.—М.: Наука, 1978.

[230] *Рубин И.К.* Оптимальная система обмоток формирования и управления поперечными магнитными полями в «Токомаке» // Автоматика. 1978. № 5. С. 49–57.

[231] *Рудик А.П.* Оптимизация физических характеристик ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1979. — 278 с.

[232] *Самойленко Ю.И., Губарев В.Ф., Кривонос Ю.Г.* Управление быстро протекающими процессами в термоядерных установках. — Киев: Наукова думка, 1988. —384 с.

[233] *Серовайский С.Я.* Оптимизация и дифференцирование. Т.1. Минимизация функционалов. Стационарные системы. — Алматы: Print-S, 2006. — 390 с.

[234] *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1977. — 498 с.

[235] *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990. — 448 с.

[236] *Смирнов И.Н.* Формула типа Даламбера для колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности, описываемых телеграфным уравнением // Доклады РАН. 2010. Т. 433, № 1. С. 25–29.

[237] *Срочко В.А.* Вычислительные методы решения экстремальных задач. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1982. — 110 с.

[238] *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Ч. 1 // Н. Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 1992.

[239] *Сумин В.И.* О расширении оптимизационных задач, связанных с функциональными уравнениями в пространствах существенно ограниченных функций // Вестник Нижегород. ун-та. 1998. № 1. С. 126–133.

[240] *Сумин В.И.* Субоптимальное управление полулинейным эллиптическим уравнением с фазовыми ограничениями и граничным управлением // Дифф. уравнения. 2001. Т. 37, № 3. С. 260–275.

[241] *Тагиев Р.К.* Оптимальное управление коэффициентами в параболических системах // Дифф. уравнения. 2009. Т. 45, № 10. С. 1492–1501.

[242] *Тихомиров В.В.* Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. I // Дифф. уравнения. 2002. Т. 38, № 3. С. 393–403.

[243] *Тихомиров В.В.* Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. II // Дифф. уравнения. 2002. Т. 38, № 4. С. 529–537.

[244] *Тихонов А.Н.* О методах регуляризации задач оптимального управления // Доклады АН СССР. 1965. Т. 162, № 4. С. 763–765.

[245] *Троицкий В.А.* Оптимальные процессы колебаний механических систем. — Л.: Машиностроение, 1976. — 248 с.

[246] *Троицкий В.А., Петухов Л.В.* Оптимизация формы упругих тел. — М.: Наука, 1982. — 412 с.

[247] *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М.: Наука, 1967.

[248] *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978. — 488 с.

[249] *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. — 734 с.

[250] *Фридман А.* Вариационные принципы в задачах со свободной границей. — М.: Наука, 1990. — 536 с.

[251] *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 352 с.

[252] *Чабакаури Г.Д.* Оптимизация граничного управления процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце // Дифф. уравнения. 2001. Т. 37, № 12. С. 1655–1663.

[253] *Чабакаури Г.Д.* Оптимизация граничного управления процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в случае ограниченной энергии // Дифф. уравнения. 2001. Т. 38, № 2. С. 277–284.

[254] *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. — М.: Физматлит, 2006. — 328 с.

[255] *Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. — М.: Наука, 1973. — 238 с.

[256] *Шакиров В.Н.* Задача демпфирования полной энергии в колебательных системах // Выч. и прикл. математика. 1981. Вып. 45. С. 62–85.

[257] *Шенфельд Г.Б.* Синтез оптимального управления упругой конструкции // Оптимизация процессов в системах с распределенными параметрами. — Фрунзе: Илим, 1975. С. 23–26.

[258] *Ягубов М.А.* Об одной задаче оптимального управления для эллиптического уравнения // Известия вузов. Матем. 1975. № 7. С. 92–98.

[259] *Ягубов М.А.* Об оптимальном скользящем режиме в системе, описываемой уравнениями эллиптического типа // Доклады АН СССР. 1984. Т. 274, № 5. С. 1044–1047.

[260] *D'Apice C., Kogut P. I., Manzo R.* Efficient controls for one class of fluid dynamic models // Far East Journal of Applied Mathematics. 2010. Vol. 46, № 2. P. 85–119.

[261] *Abergel F., Temam R.* Optimality conditions for some nonqualified problems of distributed control // SIAM J. Contr. Optim. 1989. Vol. 27, № 1. P. 1–12.

[262] *Abuladze A., Klotzler R.* Distributional control in processes with Hammerstein type integral equations // Zeits. Anal. Anwen. 1992. Vol. 11, № 2. P. 269–276.

[263] *Acar R.* Identification of the coefficient in elliptic equation // SIAM J. Contr. Optim. 1993. Vol. 31, № 5. P. 1221–1244.

[264] *Ahmed K.L., Teo N.U.* On the optimal control system governed by quasilinear integro partial differential equations of parabolic type // J. Math. Annal. Appl. 1977. Vol. 59, № 1. P. 33–59.

[265] *Alibert J.J., Raymond J.P.* Boundary control of semilinear elliptic equations with discontinuos leading coefficients and unbounded control // Num. Funct. Anal. Optim. 1997. Vol. 18, № 3–4. P. 235–250.

[266] *Ammari K., Jellouli M.* Remark on stabilization of tree-shaped networks of strings // Appl. Math. 2007. Vol. 52, № 4. P. 327–343.

[267] *Ammari K., Jellouli M., Khenissi M.* Stabilization of generic trees of strings // J. Dym. Contr. Sys. 2005. Vol. 11, № 2. P. 177–193.

[268] *Amouroux M., Babary J.P.* On optimization of zones of action for an optimal control problem for distributed parameter systems // Int. J. Control. 1979. Vol. 29, № 5. P. 861–869.

[269] *Arada N., Raymond J.P.* State-constrained relax problems for semilinear elliptic equations // J. Math. Anal. Appl. 1998. Vol. 223, № 1. P. 177–202.

[270] *Barbu V.* Necessary conditions for distributed control problems governed by parabolic variational inequalities // SIAM J.Contr. Optim. 1981. Vol. 19, № 1. P. 64–68.

[271] *Barbu V.* Optimal feedback controls for semilinear parabolic equations // Lect. Notes Math. 1983. Vol. 979. P. 43–70.

[272] *Bardos C., Lebeau G., Rauch J.* Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary // SIAM J. Contr. Optim. 1992. Vol. 30, № 5. P. 1024–1065.

[273] *Bardi M., Bottacin S.* On the Dirichlet problem for nonlinear degenerate elliptic equations and applications to optimal control // Rend. Semin. Math. Univ. Politecn. Torino. 1998. Vol. 56, № 4. P. 13–39.

[274] *Becker R., Kapp H., Rannacher R.* Adaptive finite elements methods for optimal control of partial differential equations: basic concept // SIAM J. Contr. Optim. 2000. Vol. 39, № 1. P. 113–132.

[275] *Bergounioux M.* A penalization method for optimal control of elliptic problems with state constraints // SIAM J. Contr. Optim. 1992. Vol. 30, № 2. P. 305–323.

[276] *Bergounioux M.* Augmented Lagrangian method for distributed optimal control problems with state constraints // J. Optim. Theory Appl. 1993. Vol. 78, № 3. P. 493–521.

[277] *Bock I., Lovisek J.* An optimal control problems for an elliptic variational inequalities // Math. Slov. 1983. Vol. 33, № 1. P. 23–28.

[278] *Bonnans J.F.* Second-order analysis for control constrained optimal control problems of semilinear elliptic systems // Appl. Math. Optimiz. 1998. Vol. 38, № 3. P. 303–325.

[279] *Bonnans J.F., Casas E.* An extension of Pontryagin's principle for state-constrained optimal control of semilinear elliptic equations and variational inequalities // SIAM J. Contr. Optim. 1995. Vol. 33, № 1. P. 274–298.

[280] *Bratus A.S.* Condition of extremum for eigenvalues of elliptic boundary-value problems// J. Optim. Theory Appl. 1991. Vol.68, № 3. P. 423–436.

[281] *Buttazzo G., Kogut P.I.* Weak optimal controls in coefficients for linear elliptic problems // Revista Matematica Complutense. 2011. Vol. 24. P. 83–94.

[282] *Cañada A., Gámez J.L., Montero J.A.* Study of an optimal control problem for diffusive nonlinear elliptic equations of logistic type // SIAM J. Contr. Optim. 1998. Vol. 36, № 4. P. 1171–1189.

[283] *Casas E.* Control of an elliptic problem with pointwise state constraints // SIAM J. Contr. Optim. 1986. Vol. 24, № 6. P. 1309–1318.

[284] *Casas E.* Boundary control of semilinear elliptic equations with pointwise state constraints // SIAM J. Contr. Optim. 1993. Vol. 33, № 4. P. 993–1006.

[285] *Casas E.* Pontryagin's principle for state-constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations // SIAM J. Contr. Optim. 1997. Vol. 35, № 4. P. 1297–1327.

[286] *Casas E., Fernández L.A.* Dealing with integral state constraints in boundary control problems of qusilinear elliptic equations// SIAM J. Contr. Optim. 1995 Vol. 33, № 2. P. 568–589.

[287] *Casas E., Mateos M.* Second order optimality conditions for semilinear elliptic control problems with finitely many state constraints // SIAM J. Contr. Optim. 2002. Vol. 40, № 5. P. 1431–1454.

[288] *Casas E., Tröltzsch F., Unger A.* Second order sufficient optimality conditions for some state-constrainted control problems

of semilinear elliptic equations // SIAM J. Contr. Optim. 2000. Vol. 38, № 5. P. 1369–1381.

[289] *Casas E., Tröltzsch F.* Second-order nesessary and sufficient optimallity conditions for optimization problem and applications to control theory // SIAM J. Contr. Optim. 2002. Vol. 40, № 2. P. 406–431.

[290] *Chen Q., Chu D., Tan R.C.E.* Optimal control of obstacle for quasi-linear elliptic variational bilateral problems // SIAM J. Contr. Optim. 2005. Vol. 44, № 3. P. 1067–1080.

[291] *Cesari L.* Existence theorems for problems of optimality with partial differential equations // Proc. Symp. Pur. Math., Berkley, Calif., v.3, Providence, 1973. P. 283–292.

[292] *Dáger R.* Observation and control of vibrations in tree-shaped networks of strings // SIAM J. Contr. Optim. 2004. Vol. 43, № 2. P. 590–623.

[293] *Dáger R., Zuazua E.* Spectral boundary controllability of networks of strings // Comp. Rend. Math. 2002. Vol. 334, № 7. P. 545–550.

[294] *Da Prato G., Ichikawa A.* Optimal control for integrodifferential equations of parabolic type // SIAM J. Contr. Optim. 1993. Vol. 31, № 5. P. 1167–1182.

[295] *Erzberger H., Kim M.* Optimum distributed parameter systems with distributed control // Proc. IEEE. 1966. Vol. 54, № 4.

[296] *Fattorini H.O., Russel D.L.* Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension // Arh. Rational Meh. and Anal. 1971. Vol. 43, № 4.

[297] *Fujii N.* Necessary conditions for a domain optimization problem in elliptic boundary value problems // SIAM J. Contr. Optim. 1986. Vol. 24, № 3. P. 346–360.

[298] *Gao H., Pavel N.H.* Optimal control problems for a class of semilinear multisolution elliptic equations // J. Optim. Theory Appl. 2003. Vol. 118, № 2. P. 353–380.

[299] *Gasanov Z. M.* About optimizing of investment volumes to improve the basic indicators of the enterprise effectiveness// Science and Transport Progress. Bulletin of Dnipropetrovsk National University of Railway Transport. 2015. № 1 (55). P.122–128.

[300] *Goebel M.* Optimal control in linear elliptic equations // Math. Oper. Stad. Optim. 1981. Vol. 12, № 4. P. 525–533.

[301] *Gong L., Fiu P.* Optimal control of nonsmooth systems governed by quasilinear elliptic equations // Int. J. Math. Mech. Sci. 1997. Vol. 20, № 2. P. 339–346.

[302] *Hackbusch W.* Fast solution of elliptic control problems // J. Optim. Theory Optim. 1980. Vol. 31, № 2. P. 565–581.

[303] *He J.W., Glowinski R.* Neumann control of unstable parabolic systems: Numerical approach // J. Optim. Theory Appl. 1998. Vol. 96, № 1. P. 1–55.

[304] *Horsin T., Kogut P.I.* On unbounded optimal controls in coefficients for a Linear Elliptic Equation. I. Existence Result // Mathematical Control and Related Fields. 2015. Vol. 5, № 1. P. 73–96.

[305] *Just A.* Optimal control of an object described by the two-dimensional equation of heat conduction // Zes. Nauk. Plodz. Mat. 1982. Vol. 14. P. 73–92.

[306] *Kapustyan V.O., Kapustyan O. A., Mazur O. K.* Distributive optimal control in one non-selft-adjoint boundary value problem // Continuous and distributed systems. Springer, 2014. Vol. 211. P. 303–312.

[307] *Knöpp U.* Explicit solutions to the optimal boundary control problem of a vibrating string // Int. J. Contr. 1981. Vol. 34, № 1. P. 95–110.

[308] *Kobayashi T.* Some remarks on controllability for distributed parameter systems // SIAM J. Contr. Optim. 1978. Vol. 16, № 5. P. 733–742.

[309] *Kogut P.I., Leugering G.* Optimal Control Problems for Partial Differential Equations on Reticulated Domains: Approximation and Asymptotic Analysis. — Birkhäuser; Boston; N.Y., 2011. 653 p.

[310] *P.I. Kogut* On Approximation of an Optimal Boundary Control Problem for Linear Elliptic Equation with Unbounded Coefficients, Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series A (DCDS-A). 2014. Vol. 34, № 5. P. 2105–2133.

[311] *Kostreva M.M., Ward A.L.* Linear formulation of a distributed boundary control problem // J. Optim. Theory Optim. 1999. Vol. 103, № 2. P. 385–399.

[312] *Lasiecka I.* Ritz–Galerkin approximation of the time optimal boundary control problem for parabolic systems with Dirichlet boundary condition // SIAM J. Contr. Optim. 1984. Vol. 22, № 3. P. 477–500.

[313] *Lasiecka I., Malanowski K.* On discrete-time Ritz–Galerkin approximation on control constrained optimal control problem for parabolic equation // Lect. Not. Contr. Inf. Sci. 1978. № 6. P. 334–342.

[314] *Lasiecka I., Triggiani R.* Exact controllability of semilinear abstract systems with application to wave and plates boundary control problems // Appl. Math. Optim. 1991. Vol. 23, № 2. P. 109–154.

[315] *Lasiecka I., Triggiani R.* Deterministic control theory for partial differential equations. Vol. 1. — Cambridge Univ. Press, Boston, 1998.

[316] *Li R., Liu W., Ma H., Tang T.* Adaptive finite element approximation for distributed elliptic optimal control problems // SIAM J. Contr. Optim. 2003. Vol. 42, № 4. P. 1244–1265.

[317] *Li X., Yong J.* Optimal control theory for infinite dimensional systems. — Birkhäuser; Boston, 1995.

[318] *Lions J.L.* Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. Vol. 30, № 1. P. 1–68.

[319] *Lou H.W.* Maximum principle of optimal control for degenerate quasi-linear elliptic equations // SIAM J. Contr. Optim. 2003. Vol. 42, № 1. P. 1–23.

[320] *Lou H.W.* Existence of optimal controls in the absence of Cesari-type conditions for semilinear elliptic and parabolic systems // J. Optim. Theory Appl. 2005. Vol. 125, № 2. P. 367–391.

[321] *Lurie K.A.* Applied Optimal control theory of distributed systems. — N. Y.: Plenum Press, 1993.

[322] *Marica A., Zuazua E.* On the quadratic finite element approximation of 1-d waves: propagation, observation, control and numerical implementation // The Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) condition. — Birkhäuser; Boston, 2013. P. 75–99.

[323] *Maurer H., Mittelmann H.* Optimization techniques for solving elliptic control problems with control and state constraints. Pt. 1. Boundary control // Comput. Optimiz. Appl. 2000. Vol. 16, № 1. P. 29–55.

[324] *Michel P.* Necessary conditions for optimality of elliptic systems with positivity constraints on the state // SIAM J. Contr. Optim. 1980. Vol. 18, № 1. P. 91–97.

[325] *Murat F., Tartar L.* On the control of the coefficients in partial equations // Topics Math. Model. Compos. Mater. — Birkhäuser; Boston, 1997. P. 1–8.

[326] *Papageorgiou N.S.* On the variational stability of a class of nonlinear parabolic equations // Z. Anal. Anwend. 1996. Vol. 15, № 1. P. 245–262.

[327] *Pritchard A.J., Mayhew M.J.E.* Feedback from discrete points for distributed parameter systems // Inter. J. Control. 1971. Vol. 14, № 4. P. 619–630.

[328] *Sasai H.* On the convergence of difference approximation in distributed parameters optimal control problems // Probl. Mem. Fac. Eng. Nagoya Univ. 1971. Vol. 23, № 2. P. 316–325.

[329] *Schmidt E.J.P.G.* On the modeling and exact controllability of networks of vibrating strings // SIAM J. Contr. Optim. 1992. Vol. 30, № 1. P. 229–245.

[330] *Seidman T., Zhou H.X.* Existence and uniqueness of optimal control for a quasilinear parabolic equations // SIAM J. Contr. Optim. 1982. Vol. 20, № 6. P. 747–762.

[331] *Sibony M.* Some numeric techniques for optimal control governed by partial differential equations // Num. Meth. Optim. — Basel, 1973. P. 123–136.

[332] *Trenchea C.* Optimal control of an elliptic equation under periodic conditions // Mem. sec. sti. Ser.4, Acad. rom. 2002. Vol. 25. P. 23–35.

[333] *White L.W.* Estimation of elastic coefficient in beam with parameter constraints: penaltization // J. Math. Anal. and Appl. 1988. Vol. 135, № 2. P. 671–690.

[334] *Wolfersdorf L.* On some optimal control problem for linear elliptic systems in the plan // Beitr. Anal. 1981. Vol. 17. P. 95–98.

[335] *Wu Z.S., Teo K.L.* A conditional gradient method for an optimal control problem involving a class of nonlinear second order hyperbolic partial differential equation // J. Math. Anal. Appl. 1983. Vol. 91 . P. 376–397.

[336] *Wu Z.S., Teo K.L.* Optimal control problem involving second boundary value problem of parabolic type // SIAM J. Contr. Optim. 1983. Vol. 21, № 5. P. 729–757.

[337] *Yong J.* Existence theory of optimal control for distributed parameter systems // Kodai Math. J. 1992. Vol. 15. P. 193–220.

[338] *Zuazua E.* Propagation, observation and control of waves approximated by finite difference methods // SIAM Rev. 2005. Vol. 47, № 2. P. 197–243.

[339] *Zuazua E.* Optimal and approximate control of finite-difference approximation scheme for the 1-d wave equation // Rendi. Mat. Ser. VII. 2004. Vol. 24, № 2. P. 201–237.

[340] *Zuazua E.* Control and stabilization of waves on 1-d networks // Modeling and optimization of flows on networks.— Springer: Berlin; Heidelberg, 2013. P. 463–493.

Предметный указатель