Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
____________А.А. Воронов
___________________ 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **ДИСКРЕТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ**
по направлению подготовки: **03.03.01 «Прикладные математика и физика»**
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **математических основ управления**
курс: 2
семестры: 4

Трудоёмкость:
вариативная часть – 1 зач. ед.,
лекции – 30 часов Диф. зачет – 4 семестр
практические (семинарские) занятия – 0 часов
лабораторные занятия – нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 30 Самостоятельная работа –15 часов

Программу составили: к.ф.-м.н., доцент Дайняк А.Б.,
д.ф.-м.н., доцент Гасников А.В.

Программа принята на заседании
кафедры математических основ управления
6 декабря 2019 года

Заведующий кафедрой С. А. Гуз

1. Отличительные особенности задач дискретной оптимизации. Обзор постановок классических задач дискретной оптимизации: покрытие множествами, вершинное покрытие, кратчайший путь, минимальное остовное дерево, задачи о паросочетании, задача о назначениях, задачи теории расписаний, задачи упаковки (bin packing, рюкзак), задачи о потоках (поток наибольшей величины, поток наименьшей стоимости, мультипродуктовые потоки), транспортная задача (задача Хичкока), задача коммивояжёра.

2. Локальный поиск как широкий общий подход к решению задач дискретной оптимизации. Системы окрестностей. Пример системы окрестностей в задаче TSP: компромисс между силой окрестности и размером. Пример, в котором 2-окрестность не позволяет достичь глобального оптимума. Эвристика Кернигана—Лина: локальный поиск переменной глубины. Надстройки над локальным поиском: имитация отжига и табу-поиск.

3. Несуществование полиномиально обозримой точной системы окрестностей в задаче TSP (в предположении P!=NP). Локальные жадные эвристики в задаче TSP, не укладывающиеся явно в парадигму локального поиска (не переходящие от цикла к циклу, а строящие цикл с нуля). Показатели качества работы эвристических (приближённых) алгоритмов: approximation ratio и domination number. Алгоритм ближайшего соседа (nearest neighbor): идея, теорема о том, что approximation ratio оценивается сверху логарифмом количества вершин.

4. Дискретная линейная задача о подмножестве (DLS problem). Задачи TSP и MST как частные случаи DLS-задач минимизации; переход к максимизации. Наследственные системы. Базы и циклы. Ранг и нижний ранг множества, ранговый разброс. Матроиды: эквивалентные определения, примеры. Оценка качества работы жадного алгоритма на наследственной системе через её ранговый разброс. Следствие о корректности жадного алгоритма построения кратчайшего остовного дерева. Оценка рангового разброса через ограничение на число циклов. Субмодулярность ранговой функции матроида. Пересечение матроидов. Оценка числа циклов для наследственной системы через число матроидов в пересечении. Вероятность единственности решения задачи DLS при случайном выборе весов: лемма об изолировании и два её доказательства (Дж. Спенсера и Н. Та-Шмы).

5. Алгоритмы Прима и Борувки для решения задачи MST: примеры, реализация (без использования куч). Алгоритм Прима с использованием фибоначчиевых куч.

6. Задачи о распределении дискретного однородного ресурса: задача дискретного максимина, максимизация суммы вогнутых функций. Критерии оптимальности (принцип уравнивания Гермейера, критерий Гросса). Два алгоритма решения задачи дискретного максимина. Оптимизация произведения при фиксированной сумме.

7. Напоминание основных понятий из линейного программирования. Задача в стандартной и канонической формах. Переход от неравенств к равенствам и обратно. Геометрия задачи: симплекс-алгоритм как локальный поиск по вершинам многогранника.

8. Пример многогранника, на котором при некоторых условиях симплекс-алгоритму может потребоваться экспоненциально много шагов: теорема Кли—Минти. Верхняя оценка на число шагов «везучего симплекс-метода»: теорема Калаи—Клейтмана о диаметре графа многогранника.

9. Понятие о сглаженном анализе алгоритмов (smoothed analysis): среднее между анализом на случайных входах и анализом худшего случая. Теорема Спилмана—Тенга о симплекс-методе.

10. Двойственность в линейном программировании: решение двойственной задачи как сертификат оптимальности решения прямой задачи. Исключение Фурье—Моцкина. Лемма Фаркаша: существование сертификата неразрешимости системы линейных неравенств. Вывод теоремы о сильной двойственности из леммы Фаркаша. Экономическая интерпретация двойственности в задаче торга.

11. Постановки задачи TSP в терминах ЦЛП. Условия Миллера—Таккера—Землина (полиномиальное количество неравенств в задаче TSP). Замечание «о некатастрофичности экспоненциального числа ограничений в задачах ЛП».

12. Простой «комбинаторный» алгоритм для задачи о вершинном покрытии (ВП) с approximation ratio = 2. Постановка задачи о взвешенном вершинном покрытии (ВВП) в терминах целочисленного линейного программирования. Алгоритм решения задачи ВВП вида «решаем задачу ЛП и округляем»;

утверждение о том, что достигается approximation ratio = 2. Формулировка двойственной задачи к задаче ВВП: потенциалы на рёбрах. «Комбинаторный» (без использования ЛП) алгоритм решения задачи ВВП на основе двойственности; доказательство того, что для этого алгоритма approximation ratio = 2.

13. Общая задача о покрытии (эквивалентная задаче о покрытии множеств). Формулировка в терминах матриц. Постановка в виде ЦЛП, формулировка двойственной задачи. Теорема о том, что размер/вес жадного покрытия не больше, чем в $\ln k$ раз, превышает размер/вес оптимального (где k — максимальное число единиц в строке). Достижимость (по порядку) этой оценки. Оценка веса жадного покрытия через вес оптимального при ограниченных весах отдельных строк.

14. Задача построения паросочетания максимальной мощности в произвольном графе. Увеличивающие пути (утверждение о том, что паросочетание немаксимально тогда и только тогда, когда есть увеличивающий путь). Проблема с поиском увеличивающих путей при отсутствии двудольности: цветки. Утверждения о сжатии цветков. Алгоритм Эдмондса.

15. Модификации алгоритма Дейкстры для быстрого практического решения задачи о кратчайшем пути: «двухсторонний» алгоритм Дейкстры, использование landmarks (в случае неравенства треугольника).

16. Задача о потоке минимальной стоимости (и заданной величины). Два двойственных алгоритма: постепенная минимизация стоимости потока при неизменной величине; приращение величины за счёт минимально возможного приращения стоимости.

17. «Биологические» метаэвристики: генетические алгоритмы, алгоритмы муравьиных колоний. Иллюстрация на задачах shortest path и TSP.

18. Метод ветвей и границ.

19. Задачи исчерпывающего перебора сложных дискретных объектов. Подход Рида: упорядоченное перечисление. Метод Ависа—Фукуды: обращение локального поиска.

20. Онлайн-оптимизация. Эвристические алгоритмы в задаче Bin Packing.

21. О понятии реоптимизации. NP-трудность точного решения задачи реоптимизации в метрической задаче коммивояжёра при увеличении веса одного ребра. Приближённые алгоритмы реоптимизации с показателем аппроксимации, лучшим, чем у алгоритма Кристофидеса, при увеличении веса одного ребра и при добавлении одной вершины в граф.

Литература

1. *Дасгупта С., Пападимитриу Х., Вазирани В.* Алгоритмы. – М.: МЦНМО, 2014.
2. *Корте Б., Фиген Й.* Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы. – М.: Изд-во МЦНМО, 2015.
3. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985.
4. *Таха Х.* Исследование операций. – М.: Вильямс, 2016.

Дополнительная литература

1. *Avis D., Fukuda K.* Reverse search for enumeration // Discrete Appl. Math. 65, 1996. – P. 21–46.
2. *Cook W.J., Cunningham W.H., Pulleyblank W.R., Schrijver A.* Combinatorial Optimization // Wiley. – 1997.
3. *Gärtner B., Matoušek J.* Approximation Algorithms and Semidefinite Programming // Springer. – 2012.
4. *Lee J. A* First Course in Combinatorial Optimization // Cambridge University Press. – 2004.
5. *Matoušek J., Gärtner B.* Understanding and Using Linear Programming // Springer. – 2007.
6. *Trevisan L.* Combinatorial Optimization // Exact and Approximate Algorithms. Stanford University. – 2011.
7. *Vazirani V.V.* Approximation Algorithms // Springer. – 2002.

Подписано в печать 20.12.2019. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 0,75

Уч.-изд. л. 0,7. Тираж 160 экз. Заказ № 656.

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru