

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной  
и методической работе  
Д. А. Зубцов  
02 июля 2014 г.

## ПРОГРАММА

по дисциплине: **Современные эффективные методы выпуклой оптимизации**

по направлению: 010900 «Прикладные математика и физика»

профиль: методы системного анализа в экономике и управлении

факультет: **ФУПМ**

кафедра: **математических основ управления**

курс: 4

семестры: 7

Трудоёмкость: базовая часть – 0 зач. ед.  
вариативная часть – 2 зач. ед.  
по выбору студента – 0 зач. ед.

лекции – 34 час Экзамен – 7 семестр

практические (семинарские)

занятия – нет

Диф. зачет – нет

лабораторные занятия – нет

Самостоятельная работа – 8 час.

**ВСЕГО ЧАСОВ – 34**

Программу составили:

д. ф.-м. н. Нестеров Ю. Е., к.ф.-м.н. Шпирко С. В.

Программа принята на заседании

кафедры математических основ управления

18 апреля 2014 года

Заведующий кафедрой

С. А. Гуз

# СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

## 1. Общая нелинейная оптимизация и ее сложность

Постановка задачи. Концепция черного ящика. Понятие эффективности численных методов.

Пример: метод равномерного перебора. Нижние оценки вычислительной сложности. Нижние оценки для глобальной оптимизации. Классификация задач нелинейной оптимизации.

## 2. Локальные методы безусловной оптимизации

Релаксация и аппроксимация. Необходимые и достаточные условия оптимальности. Класс дифференцируемых и дважды дифференцируемых функций. Градиентный метод и метод Ньютона. Скорость сходимости. Условная минимизация.

## 3. Нижние оценки сложности для гладких задач

Выпуклые функции и их свойства. Примеры выпуклых функций. Необходимые и достаточные условия первого и второго порядка для выпуклых функций.

Выпуклые функции с липшицевым градиентом и их свойства. Нижняя оценка сложности для класса выпуклых функций с липшицевым градиентом.

Сильно выпуклые функции и их свойства. Примеры сильно выпуклых функций. Необходимые и достаточные условия первого и второго порядка для сильно выпуклых функций. Нижняя оценка сложности для класса сильно выпуклых функций с липшицевым градиентом.

Оценки скорости сходимости градиентного метода на классах выпуклых и сильно выпуклых функций с липшицевым градиентом

## 4. Оптимальные методы для гладких выпуклых задач

Оценивающие последовательности. Общая схема метода быстрых градиентов. Варианты метода быстрых градиентов и их оценки скорости сходимости.

Выпуклые множества и их свойства. Постановка задачи условной оптимизации. Необходимое и достаточное условие оптимальности. Понятие градиентного отображения и его свойства. Аналог градиентного метода и метода быстрых градиентов для задач условной минимизации. Оценки их скорости сходимости.  
Задача минимизации функций с гладкими компонентами

## **5. Субградиентный метод для задач выпуклой минимизации общего вида**

Постановка задачи выпуклой минимизации общего вида. Примеры таких задач. Понятие субградиента. Примеры вычисления субградиентов. Свойства субградиента. Необходимое и достаточное условие оптимальности. Теорема Куна–Таккера.  
Нижняя граница сложности для класса выпуклых и липшицевых функций на ограниченном множестве.  
Субградиентный метод на простых множествах. Оценка его сходимости.  
Субградиентный метод на множестве с функциональными ограничениями и его оценка сходимости. Оптимальность субградиентного на данном классе задач.

## **6. Методы отсекающей гиперплоскости для задач выпуклой конечномерной минимизации**

Постановка задачи разрешимости. Нижняя оценка сложности для данного класса задач.  
Принцип локализации решения.  
Методы отсекающей гиперплоскости. Обобщенный метод отсекающей гиперплоскости.  
Метод эллипсоидов.

## **7. Структурная оптимизация. Самосогласованные функции**

Самосогласованная функция. Примеры и свойства самосогласованной функции. Основные неравенства. Минимизация самосогласованных функций.

## **8. Структурная оптимизация. Самосогласованные барьеры**

Постановка задачи. Уравнение центральной траектории. Самосогласованный барьер. Примеры и свойства самосогласованного барьера. Аналитический центр множества. Метод отслеживания траектории и оценки его скорости сходимости.

## **9. Приложения структурной оптимизации**

Границы параметров самосогласованных барьеров. Линейная и квадратичная оптимизация. Полуопределенная оптимизация. Экстремальные эллипсоиды.

## **10. Гладкая минимизация для негладких функций: прорыв за пределы возможного**

Постановка задачи. Функции с явно заданной структурой. Понятие сопряженной (дуальной) задачи.

Прокс-функция. Техника сглаживания. Оптимальная схема для решения задач гладкой задачи.

Применение данного подхода к матричным играм, задаче Штейнера, вариационным неравенствам.

## **11. Прямо-двойственные методы решения негладких задач**

Нижняя линейная аппроксимация (модель) исходной целевой функции. Сильное и слабое решение негладкой задачи. Функция зазора и ее свойства.

Общая схема двойственного усреднения. Метод простого двойственного усреднения. Метод взвешенного двойственного усреднения. Оценки скорости их сходимости.

Применение метода двойственного усреднения к общей задаче минимизации, прямо-двойственной задаче, минимаксной задаче, седловой задаче.

Экономическая интерпретация метода двойственного усреднения (модель сбалансированного развития).

## **12. Минимизация составных функций. Генерация разреженных решений**

Постановка задачи. Понятие градиентного композитного отображения и его свойства.

Прямой градиентный метод. Оценки его скорости сходимости в выпуклом и сильно выпуклом случае.

Двойственный градиентный метод и его оценки скорости сходимости.

Двойственный градиентный метод с ускорением и его оценки скорости сходимости.

Применение данных методов к решению задачи разреженных наименьших квадратов. Обсуждение численных результатов.

## **13. Методы покоординатного спуска решения задач сверхбольшой размерности**

Специфика задач сверхбольшой размерности.

Метод случайного покоординатного спуска для решения выпуклых задач безусловной минимизации и его оценки скорости сходимости.

Метод случайного покоординатного спуска для решения сильно выпуклых задач безусловной минимизации и его оценки скорости сходимости.

Метод случайного покоординатного спуска для решения выпуклых задач условной минимизации и его оценки скорости сходимости.

Метод случайного покоординатного спуска с ускорением для решения выпуклых задач безусловной минимизации и его оценки скорости сходимости.

Обсуждение численных результатов работы данных методов.

## **14. Субградиентные методы решения задач сверхбольшой размерности**

Эффективный пересчет матрично-векторного произведения в разреженном случае. Быстрый пересчет значения симметричной функции с помощью бинарного дерева.

Субградиентный метод Б. Поляка для решения задач безусловной оптимизации и оценка его скорости сходимости. Субградиентный метод Н. Шора для решения задач условной оптимизации и оценка его скорости сходимости.

Применение данной техники пересчета к задачам сверхбольшой размерности с разреженной структурой.

Метод случайного покоординатного спуска для решения негладкой задачи минимизации с разреженным субградиентом. Применение техники пересчета к данному методу.

### **15. Безусловная выпуклая минимизация с относительной точностью**

Однородные функции. Постановка задачи минимизации с относительной точностью. Эллипсоид Джона. Простая субградиентная схема. Субградиентная схема с рекурсивной стратегией обновления начального приближения.

## **Литература**

1. *Нестеров Ю. Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. М.:2010.
2. *Nesterov Yu.* Smooth minimization of non-smooth functions, *Mathematical Programming*, 103(1), 127 – 152 (2005).
3. *Nesterov Yu.* Primal-dual subgradient methods for convex problems. *Mathematical Programming*, 120(1), 261 – 283 (2009).
4. *Nesterov Yu.* Efficiency of coordinate descent methods on huge-scale optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, 22(2), 341-362 (2012).
5. *Nesterov, Yu.* Unconstrained Convex Minimization in Relative Scale, *Mathematics of Operations Research*, 34(1), 180-193 (2009).

## Дополнительная литература

1. *Nesterov Yu., Nemirovskii A.* Interior-point polynomial algorithms in convex programming. // *SIAM Review*, 1994. – V. 35, № 1. – P. 94–103.
2. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. – М. : Наука, 1983.
3. *Ben-Tal A., Nemirovski A.* Lectures on modern convex optimization. – SIAM. 2001.
4. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex optimization. – United Kindom: Cambridge University Press. 2004.
5. *Bubeck S.* Theory of Convex Optimization for Machine Learning. Submitted. 2014. <http://www.princeton.edu/~sbubeck/Bubeck14.pdf>

Подписано в печать 02.07.2014. Формат  $60 \times 84 \frac{1}{16}$ .

Усл. печ. л. 0,5. Тираж 100 экз. Заказ № 242.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»  
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

E-mail: [rio@mail.mipt.ru](mailto:rio@mail.mipt.ru)